

François **Cottet-Emard**

Analyse

**COURS
ET EXERCICES CORRIGÉS**

LMD

Licence de mathématiques, L2



de boeck

Table des matières

Avant-propos.....	III
-------------------	-----

Chapitre 1 Rappels et compléments d'analyse

1. Borne supérieure.....	2
1.1 Un exemple.....	2
1.2 Partie majorée de \mathbb{R}	3
1.3 Théorème de la borne supérieure.....	3
1.4 Suite croissante de réels.....	4
2. Borne inférieure.....	5
2.1 Partie minorée de \mathbb{R}	5
2.2 Théorème de la borne inférieure.....	6
2.3 Suite décroissante de réels.....	6
2.4 Un exemple pour se détendre.....	7
3. Suites adjacentes de réels.....	8
3.1 Suites adjacentes.....	8
3.2 Théorème des segments emboîtés.....	9
4. Théorèmes sur les fonctions monotones.....	10
4.1 Fonction majorée, minorée, bornée sur \mathcal{I}	10
4.2 Fonction croissante sur un intervalle \mathcal{I}	11
4.3 Fonction décroissante sur un intervalle \mathcal{I}	12
4.4 Remarque fondamentale concernant ces quatre théorèmes.....	12
4.5 Exemples.....	13
5. Fonction intégrable au sens de Riemann.....	15
5.1 Aire sous une courbe.....	15
5.2 Fonction intégrable sur un segment.....	16
5.3 Cas des fonctions continues sur un segment.....	20
5.4 Définition pratique de $\int_a^b f(t) dt$ pour f continue.....	21
6. Propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment.....	22
6.1 Linéarité.....	23
6.2 Inégalité de la moyenne.....	23

6.3	Positivité de l'intégrale.....	23
6.4	Compatibilité avec la relation d'ordre	23
6.5	Intégrale et valeur absolue.....	24
6.6	Relation de Chasles.....	24
6.7	Théorème fondamental du calcul intégral.....	25
6.8	Calcul pratique d'une intégrale	26
Exercices		27
1.	Limite, continuité, suite et intégrale	27
2.	Borne supérieure ou inférieure	32

Chapitre 2 Intégrales généralisées

1. Introduction	40
1.1 Historique.....	40
1.2 Ce que nous allons faire	41
1.3 Interprétation géométrique	42
2. Intégrales généralisées sur un intervalle borné	44
3. Intégrales généralisées sur une demi-droite $[a, +\infty[$	47
4. L'exemple fondamental des intégrales de Riemann	50
5. Intégrales généralisées aux deux bornes	51
6. Cas des fonctions de signe constant sur l'intervalle \mathcal{I}	54
6.1 Théorème général	55
6.2 Comparaison des intégrales généralisées de deux fonctions positives	57
6.3 Intégrales généralisées de deux fonctions positives équivalentes	62
7. Intégrales généralisées absolument convergentes	67
8. Intégrales généralisées dont on n'a pas pu montrer qu'elles étaient absolument convergentes	71
8.1 Utilisation de l'intégration par parties.....	72
8.2 Utilisation d'un changement de variable	76
8.3 Utilisation d'un développement limité ou asymptotique.....	78
8.4 Montrer avec la définition qu'une intégrale diverge	81
9. Récapitulatif des techniques	82

Exercices	85
1. Intégrales généralisées	85
2. Exercices théoriques.....	108
3. Intégrales dépendant d'un paramètre.....	113
4. Exercices supplémentaires	120

Chapitre 3 Séries numériques réelles

1. Idée de sommation infinie	126
1.1 Le gâteau idéal.....	126
1.2 La balle parfaite	126

1.3	Combien d'enfants ?	127
2.	Définition	127
2.1	Définition	127
2.2	Exemples divers	128
2.3	Reste d'une série convergente	131
2.4	Opérations sur les séries	132
2.5	Une condition nécessaire de convergence d'une série	132
2.6	Une notation condensée	133
3.	C.N.S. de convergence des séries à terme positifs	133
4.	Séries $u_n = f(n)$ avec f positive décroissante vers 0	134
4.1	Théorème fondamental	135
4.2	Exemples fondamentaux	137
4.3	Encadrement du reste	137
5.	Comparaison de deux séries à termes positifs	139
5.1	Série majorée par une autre série	139
5.2	Séries positives équivalentes	141
6.	Règles de d'Alembert et de Cauchy pour les séries positives	142
6.1	Règle de d'Alembert	143
6.2	Règle de Cauchy	146
7.	Séries absolument convergentes	147
8.	Règles de d'Alembert et de Cauchy pour des séries de signe quelconque	150
9.	Séries alternées	151
9.1	Définition et théorème	151
9.2	Signe et encadrement de la somme d'une série alternée	153
9.3	Exemples	153
9.4	Majoration du reste d'une série alternée vérifiant ce critère	156
10.	Critère d'Abel	158
11.	Utilisation des développements limités	161
12.	Sommation par paquets	163
13.	Sommation exacte ou approchée	164
13.1	Sommation exacte	165
13.2	Sommation approchée	167
14.	Récapitulatif des techniques	169
15.	Peut-on changer l'ordre des termes dans une série convergente ?	171
15.1	Étude de cet exemple	172
15.2	Un exemple bien pire où il y a divergence	172
15.3	Conclusion	174
16.	Annexe culturelle	175
Exercices		177
1.	Étude de la convergence de séries	177

2.	Calculs de sommes et encadrements.....	184
3.	Exercices théoriques.....	190
4.	Fonctions définies par une série.....	192
5.	Exercices supplémentaires.....	199

Chapitre 4 Convergence uniforme des suites et séries de fonctions

1.	Présentation	206
1.1	Suite de fonctions.....	206
1.2	Attention à ne pas confondre n et x	206
1.3	Vocabulaire du chapitre.....	207
1.4	Une motivation parmi d'autres.....	207
1.5	Borne supérieure.....	207
2.	Distance de deux fonctions sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}	208
2.1	Définition.....	208
2.2	Calcul pratique de cette distance.....	208
3.	Convergence simple d'une suite de fonctions	209
4.	Convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un domaine \mathcal{D}	211
4.1	L'idée d'uniformité.....	211
4.2	Convergence uniforme sur \mathcal{D}	211
4.3	Convergence uniforme et convergence simple.....	211
4.4	Technique pratique d'étude.....	212
4.5	Interprétation géométrique.....	212
5.	Théorèmes fondamentaux	217
5.1	Continuité de la limite uniforme.....	217
5.2	Intégration et limite uniforme.....	218
5.3	Dérivation et limite uniforme.....	218
6.	Un exemple d'utilisation de la convergence uniforme	220
7.	Convergence uniforme d'une série de fonctions sur \mathcal{D}	221
7.1	Convergence simple d'une série de fonctions sur \mathcal{D}	222
7.2	Convergence uniforme d'une série de fonctions sur \mathcal{D}	222
8.	Une condition suffisante de convergence uniforme : convergence normale d'une série de fonctions sur \mathcal{D}	229
8.1	Définition et théorème.....	229
8.2	Une condition nécessaire et suffisante de convergence normale sur \mathcal{D}	231
8.3	Technique pratique pour étudier la convergence normale.....	232
9.	Que d'adjectifs pour qualifier la convergence des séries de fonctions !	234
10.	Théorèmes généraux sur les séries de fonctions	236
	Exercices	247
1.	Suites de fonctions.....	247
2.	Exercices théoriques.....	253
3.	Séries de fonctions.....	254

4. Utilisation de la transformation d'Abel	277
5. Exercices supplémentaires	279

Chapitre 5 Séries entières

1. Suites et séries à valeurs complexes	294
1.1 Convergence d'une suite de complexes	294
1.2 Attention, la monotonie n'a plus de sens	294
1.3 Séries à termes complexes	295
2. Définition. Lemme d'Abel	296
2.1 Définition d'une série entière	296
2.2 Lemme d'Abel	297
3. Rayon de convergence d'une série entière	298
3.1 Définition	298
3.2 Un cas simple de calcul de R	301
3.3 Rayons de convergence de e^x et $\ln(1+x)$	303
3.4 Terminologie	304
4. Continuité et dérivabilité de la somme d'une série entière	304
4.1 Introduction	304
4.2 Continuité de la somme	304
4.3 Dérivabilité de la somme	306
4.4 Intégration d'une série entière	309
4.5 Généralisation	310
4.6 Un corollaire important	311
4.7 Continuité au bord de l'intervalle de convergence	312
5. Développement d'une fonction en série entière	314
5.1 Conditions nécessaires	315
5.2 Une condition suffisante	315
5.3 Les fonctions sinus et cosinus	316
5.4 La fonction exponentielle	316
5.5 La fonction logarithme	316
5.6 La fonction Arc tangente	317
5.7 La fonction $f(x) = (1+x)^a$	317
5.8 Fractions rationnelles	319
5.9 Identifier des sommes de séries entières	320
6. Application à certaines équations différentielles	322
Exercices	325
1. Rayons de convergence	325
2. Calculs de sommes ou de développements	330
3. Exercices théoriques	335
4. Applications diverses	336