



Calcul différentiel topologique élémentaire

Wolfgang Bertram

Bertram, Wolfgang

Calvage et Mounet, Montrouge (Hauts-de-Seine)

Mathématiques en devenir, n° 106

ISBN: 978-2-916352-23-7

Table des Matières

Calcul différentiel topologique élémentaire

Wolfgang Bertram

Calvage & Mounet

Partie 1. Continuité

I. Espaces métriques

1. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$	3
2. Espaces vectoriels normés	4
3. Espaces métriques	6
4. Petit vocabulaire de topologie	7

II. Continuité

1. Applications continues	11
2. Exemples et constructions	14
3. Applications linéaires bornées	18
4. Équivalence de normes	20

III. Compacité

1. La propriété de Bolzano-Weierstrass	23
2. Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$	24
3. Applications de la compacité	25
4. *Limites presque radiales. Notation de Landau	27
5. *La propriété de Heine-Borel-Lebesgue	29

IV. *Espaces topologiques

1. Espaces topologiques	31
2. Applications continues	33
3. Les structures algébriques topologiques	35

V. *Interlude : Convexité

1. Parties convexes	39
2. Fonctions convexes	42

Partie 2. Calcul différentiel

VI. Les courbes différentiables

1. La courbe dérivée d'une courbe	49
2. Intégrale simple d'une courbe	51
3. La pente	53

VII. La classe L^1 et la différentielle

1. La dérivée directionnelle et la pente	58
--	----

2. La classe L^1	59
3. La différentielle	61
VIII. La classe L^1 - exemples et règles de calcul	
1. Exemples	65
2. Dérivées partielles et matrice jacobienne	70
3. *Convergence au sens L^1	72
IX. Les classes L^k, $k \geq 2$	
1. La dérivée seconde	77
2. Symétrie	80
3. Les classes L^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$	82
X. La formule de Taylor	
1. Développement à l'ordre 0	86
2. Développement à l'ordre 1	87
3. Développement à l'ordre ≥ 2	87
XI. Analyse vectorielle	
1. Champs de vecteurs	91
2. Les 1-formes	95
3. Gradients	97
4. Extrema locaux	99
XII. *Le cas complexe	
1. L'espace métrique $\mathbb{C}^n$	103
2. Applications holomorphes	103
3. Les équations de Cauchy-Riemann	107
XIII. *Le cas de la dimension infinie	
1. La définition fondamentale	109
2. Résultats et mises en garde	111
3. Exemples fondamentaux	114
XIV. **Autres corps de base	
1. Corps topologiques	117
2. Calcul différentiel sur un corps topologique	120
3. La formule de Taylor abstraite	123
4. Cas d'un anneau topologique	128
5. Autres perspectives	129
XV. *Développements limités et différentiabilité en un point	
1. Développement limité en norme	132
2. Développement limité radial	133
3. Différentiabilité à l'ordre 1 en un point	135
4. Les classes L^k_a	138
5. Visite dans le musée des contre-exemples	140
XVI. **Applications analytiques	
1. Remarques introductives	141
2. Séries formelles	142

3. Convergence	145
4. Applications analytiques	149
5. En guise de conclusion	152
Partie 3. Éléments d'intégration	
XVII. Recherche de primitives. Connexité	
1. Existence de primitives : le problème	155
2. Connexité	156
3. Condition nécessaire	158
4. Condition suffisante : lemme de Poincaré	159
5. *Intégrales curvilignes	161
6. *Primitives de fonctions holomorphes	164
XVIII. Le théorème du point fixe ; complétude	
1. Espaces métriques complets	169
2. *Espaces de Banach	171
3. Théorème du point fixe	172
4. *Complétion	173
XIX. Inversion locale et fonctions implicites	
1. Théorème d'inversion locale	177
2. Théorème des fonctions implicites	181
3. *Le théorème du rang constant	184
XX. Extremums liés	
1. L'espace tangent	192
2. La méthode des multiplicateurs de Lagrange	193
A. Exercices élémentaires	
1. Espaces métriques et topologiques	197
2. Calcul différentiel	207
3. Éléments d'intégration	219
4. Le lemme de Morse	225
5. Lois de Kepler et trajectoires des planètes	227
B. Exercices avancés	
1. Bonnes algèbres topologiques	231
2. Corps et espaces ultramétriques	237
3. Calcul infinitésimal. I : nombres hyperréels	243
4. Calcul infinitésimal. II : nombres duaux	247
5. Retour sur les équations de Cauchy-Riemann	255
6. Courbes et différences divisées	259
7. Calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques	262
8. Les sphères et les applications conformes	266
9. Espaces projectifs et applications projectives	270
10. Les bonnes droites projectives AP ¹	273
11. Crochet de Lie	275
12. Intégrales curvilignes et dérivée extérieure	278

Bibliographie	281
Notations	285
Index	287