



Statistique : la théorie et ses applications

Michel Lejeune

Lejeune, Michel

Springer, Paris

Statistique et probabilités appliquées

ISBN: 978-2-8178-0156-8

## Table des Matières

Statistique

La théorie et ses applications

Michel Lejeune

Springer

1 Variables aléatoires	1
1.1 Notion de variable aléatoire	1
1.2 Fonction de répartition	4
1.3 Cas des variables aléatoires discrètes	6
1.4 Cas des variables aléatoires continues	6
1.5 Notion essentielle de quantile	9
1.6 Fonction d'une variable aléatoire	11
1.7 Exercices	12
2 Espérance mathématique et moments	15
2.1 Introduction et définition	15
2.2 Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire	16
2.3 Linéarité de l'opérateur $E(\cdot)$ , moments, variance	18
2.4 Tirage aléatoire dans une population finie: distribution empirique et distribution probabiliste	21
2.5 Fonction génératrice des moments	21
2.6 Formules d'approximation de l'espérance et de la variance d'une fonction d'une v.a.	24
2.7 Exercices	25
3 Couples et $n$ -uplets de variables aléatoires	27
3.1 Introduction	27
3.2 Couples de v.a.	28
3.3 Indépendance de deux variables aléatoires	31
3.4 Espérance mathématique, covariance, corrélation	32
3.5 Somme de deux v.a.	36
3.6 Les $n$ -uplets de v.a.; somme de $n$ v.a.	37
3.7 Sondage aléatoire dans une population et v.a. i.i.d.	38
3.8 Notation matricielle des vecteurs aléatoires	39
3.9 Loi de Gauss multivariée	40
3.10 Exercices	43
4 Les lois de probabilités usuelles	45
4.1 Les lois discrètes	45

4.1.1	La loi <b>uniforme</b> discrète	45
4.1.2	Loi de Bernoulli $B(p)$	46
4.1.3	Le processus de Bernoulli et la loi binomiale $B(n, p)$	47
4.1.4	Les lois géométrique $G(p)$ et binomiale négative $BN(r, p)$	49
4.1.5	La loi <b>hypergéométrique</b> $H(N, M, n)$	50
4.1.6	La loi <b>multinomiale</b>	51
4.1.7	Le processus et la loi de Poisson $P(\lambda)$	51
4.2	Les lois <b>continues</b>	54
4.2.1	La loi <b>continue uniforme</b> $U[a, b]$	54
4.2.2	La loi <b>exponentielle</b> $E(\lambda)$	55
4.2.3	La loi gamma $\Gamma(r, \lambda)$	56
4.2.4	La loi de Gauss ou loi normale $N(\mu, \sigma^2)$	57
4.2.5	La loi <b>lognormale</b> $LN(\mu, \sigma^2)$	60
4.2.6	La loi de Pareto	61
4.2.7	La loi de Weibull $W(\lambda, \alpha)$	61
4.2.8	La loi de Gumbel	62
4.2.9	La loi <b>bêta</b> $Beta(\alpha, \beta)$	63
4.3	<b>Génération</b> de nombres issus d'une loi donnée	63
4.4	<b>Exercices</b>	64
5	Lois <b>fondamentales</b> de l'échantillonnage	67
5.1	<b>Phénomènes</b> et échantillons aléatoires	67
5.2	<b>Moyenne</b> , variance, moments empiriques	69
5.3	Loi du <b>Khi-deux</b>	72
5.4	Loi de <b>Student</b>	74
5.5	Loi de Fisher-Snedecor	76
5.6	<b>Statistiques</b> d'ordre	77
5.7	Fonction de répartition empirique	78
5.8	<b>Convergence</b> , approximations gaussiennes, grands échantillons	79
5.8.1	Les modes de <b>convergence</b> aléatoires	79
5.8.2	Lois des <b>grands nombres</b>	81
5.8.3	Le <b>théorème central limite</b>	82
5.9	<b>Exercices</b>	86
6	<b>Théorie</b> de l'estimation paramétrique ponctuelle	91
6.1	Cadre <b>général</b> de l'estimation	91
6.2	Cadre de l'estimation paramétrique	92
6.3	La classe <b>exponentielle</b> de lois	94
6.4	Une approche <b>intuitive</b> de l'estimation: la méthode des moments	96
6.5	<b>Qualités</b> des estimateurs	98
6.5.1	Biais d'un estimateur	99
6.5.2	Variance et erreur quadratique moyenne d'un estimateur	100
6.5.3	<b>Convergence</b> d'un estimateur	103
6.5.4	<b>Exhaustivité</b> d'un estimateur	105

6.6	Recherche des meilleurs estimateurs sans biais	110
6.6.1	Estimateurs UMVUE	110
6.6.2	Estimation d'une fonction de <i>thêta</i> et reparamétrisation	114
6.6.3	Borne de Cramer-Rao et estimateurs efficaces	114
6.6.4	Extension à un paramètre de dimension $k > 1$	118
6.7	L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance	121
6.7.1	Définitions	122
6.7.2	Exemples et propriétés	123
6.7.3	Reparamétrisation et fonctions du paramètre	126
6.7.4	Comportement asymptotique de l'EMV	127
6.8	Les estimateurs bayésiens	128
6.9	Exercices	131
7	Estimation paramétrique par intervalle de confiance	135
7.1	Définitions	135
7.2	Méthode de la fonction pivot	138
7.3	Méthode asymptotique	140
7.4	Construction des IC classiques	144
7.4.1	IC pour la moyenne d'une loi $N(\mu, \sigma^2)$	144
7.4.2	IC pour la variance $\sigma^2$ d'une loi de Gauss	146
7.4.3	IC sur la différence des moyennes de deux lois de Gauss	147
7.4.4	IC sur le rapport des variances de deux lois de Gauss	149
7.4.5	IC sur le paramètre $p$ d'une loi de Bernoulli	150
7.4.6	IC sur la différence des paramètres de deux lois de Bernoulli	152
7.5	IC par la méthode des quantiles	153
7.6	Approche bayésienne	157
7.7	Notions d'optimalité des IC	158
7.8	Région de confiance pour un paramètre de dimension $k > 1$	159
7.9	Intervalles de confiance et tests	163
7.10	Exercices	163
8	Estimation non paramétrique et estimation fonctionnelle	167
8.1	Introduction	167
8.2	Estimation de la moyenne et de la variance de la loi	168
8.2.1	Estimation de la moyenne $\mu$	168
8.2.2	Estimation de la variance $\sigma^2$	169
8.3	Estimation d'un quantile	170
8.4	Les méthodes de rééchantillonnage	172
8.4.1	Introduction	172
8.4.2	La méthode du jackknife	173
8.4.3	La méthode du bootstrap	177
8.5	Estimation fonctionnelle	181
8.5.1	Introduction	181
8.5.2	L'estimation de la densité	182

8.5.3L'estimation de la fonction de répartition	192
8.6Exercices	198
9Tests d'hypothèses paramétriques	201
9.1Introduction	201
9.2Test d'une hypothèse simple avec alternative simple	202
9.3Test du rapport de vraisemblance simple	208
9.3.1Propriété d'optimalité	208
9.3.2Cas d'un paramètre de dimension 1	212
9.4Tests d'hypothèses multiples	213
9.4.1Risques, puissance et optimalité	213
9.4.2Tests d'hypothèses multiples unilatérales	214
9.4.3Tests d'hypothèses bilatérales	219
9.5Test du rapport de vraisemblance généralisé	220
9.6Remarques diverses	226
9.7Les tests paramétriques usuels	228
9.7.1Tests sur la moyenne d'une loi $N(\mu, \sigma^2)$	229
9.7.2Test sur la variance $\sigma^2$ d'une loi $N(\mu, \sigma^2)$	231
9.7.3Tests de comparaison des moyennes de deux lois de Gauss	232
9.7.4Tests de comparaison des variances de deux lois de Gauss	235
9.7.5Tests sur le paramètre $p$ d'une loi de Bernoulli (ou test sur une proportion)	235
9.7.6Tests de comparaison des paramètres de deux lois de Bernoulli (comparaison de deux proportions)	237
9.7.7Test sur la corrélation dans un couple gaussien	240
9.8Dualité entre tests et intervalles de confiance	242
9.9Exercices	244
10Tests pour variables catégorielles et tests non paramétriques	251
10.1Test sur les paramètres d'une loi multinomiale	252
10.1.1Test du rapport de vraisemblance généralisé	252
10.1.2Test du khi-deux de Pearson	254
10.1.3Équivalence asymptotique des deux tests	255
10.1.4Cas particulier de la loi binomiale	256
10.2Test de comparaison de plusieurs lois multinomiales	257
10.3Test d'indépendance de deux variables catégorielles	259
10.3.1Test du RVG et test du khi-deux	259
10.3.2Test exact de Fisher (tableau 2x2)	262
10.4Tests d'ajustement à un modèle de loi	264
10.4.1Ajustement à une loi parfaitement spécifiée	265
10.4.2Ajustement dans une famille paramétrique donnée	267
10.5Tests non paramétriques sur des caractéristiques de lois	272
10.5.1Introduction	272
10.5.2Les statistiques de rang	272
10.5.3Tests sur moyenne, médiane et quantiles	273

10.5.4Tests de localisation de deux lois	274
10.5.5Test pour la corrélation de Spearman	281
10.6Exercices	283
11Régressions linéaire, logistique et non paramétrique	289
11.1Introduction à la régression	289
11.2La régression linéaire	292
11.2.1Le modèle	292
11.2.2Les estimateurs du maximum de vraisemblance	293
11.2.3Intervalles de confiance	296
11.2.4Test $H_0: \beta_1 = 0$	297
11.2.5Cas non gaussien	299
11.2.6Régression et corrélation linéaires	300
11.2.7Extension à la régression multiple	303
11.3La régression logistique	305
11.3.1Le modèle	305
11.3.2Estimation de la fonction $p(x)$	306
11.3.3Matrice des variances-covariances de $\beta$	308
11.3.4Test $H_0: \beta_1 = 0$	309
11.3.5Intervalles de confiance	310
11.3.6Remarques diverses	312
11.4La régression non paramétrique	314
11.4.1Introduction	314
11.4.2Définition des estimateurs à noyaux	314
11.4.3Biais et variance	315
11.4.4La régression polynomiale locale	318
11.5Exercices	320
Corrigés des exercices	323
Tables	415
Bibliographie	421
Index	425