



SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

Licence 3 • CAPES

ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3

Patrice Tauvel

DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS	XI
CHAPITRE 1 • SÉRIES NUMÉRIQUES	
1.1 Notations et rappels	1
1.2 Limite supérieure et limite inférieure	2
1.3 Généralités sur les séries numériques	4
1.4 Séries à termes positifs	6
1.5 Convergence absolue	8
1.6 Règles de Cauchy et de d'Alembert	10
1.7 Séries alternées	11
1.8 Séries semi-convergentes	12
1.9 Série produit	13
1.10 Convergence associative ou commutative	14
1.11 Intégrales et séries	17
Exercices	19
Solutions des exercices	20
CHAPITRE 2 • SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS	
2.1 Convergence simple	23
2.2 Convergence uniforme	24
2.3 Continuité	25
2.4 Dérivabilité	25
2.5 Intégrabilité	27

2.6	Séries de fonctions	28
2.7	Convergence normale	29
	Exercices	30
	Solutions des exercices	31
CHAPITRE 3 • SÉRIES ENTIÈRES		
3.1	Généralités	35
3.2	Rayon de convergence	36
3.3	Continuité et intégrabilité	38
3.4	Dérivabilité	39
3.5	Fonctions développables en série entière	40
3.6	Quelques exemples	42
3.7	Fonction exponentielle	43
3.8	Fonctions circulaires et hyperboliques	45
	Exercices	46
	Solutions des exercices	47
CHAPITRE 4 • FONCTIONS ANALYTIQUES		
4.1	Définition des fonctions analytiques	50
4.2	Principe du prolongement analytique	52
4.3	Principe des zéros isolés	52
	Exercices	54
	Solutions des exercices	54
CHAPITRE 5 • FONCTIONS HOLOMORPHES		
5.1	Rappels	58
5.2	Conditions de Cauchy-Riemann	59
5.3	Déterminations continues du logarithme	62
5.4	Autres déterminations continues	64
	Exercices	65
	Solutions des exercices	66

CHAPITRE 6 • ANALYTICITÉ ET HOLOMORPHIE

6.1	Arcs et chemins	67
6.2	Intégration complexe	69
6.3	Indice	71
6.4	Existence des primitives	72
6.5	Analyticité des fonctions holomorphes	77
6.6	Fonctions circulaires réciproques	79
	Exercices	82
	Solutions des exercices	83

CHAPITRE 7 • PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HOLOMORPHES

7.1	Inégalités de Cauchy et conséquences	84
7.2	Principe du maximum	85
7.3	Lemme de Schwarz et applications	87
7.4	Suites et séries	89
7.5	Holomorphie et intégration	91
	Exercices	94
	Solutions des exercices	95

CHAPITRE 8 • FONCTIONS MÉROMORPHES

8.1	Un point de topologie	98
8.2	Singularités isolées	99
8.3	Fonctions méromorphes	101
8.4	Théorème des résidus	102
8.5	Théorème de l'indice	104
8.6	Théorème de Rouché	106
8.7	Inversion locale	107
8.8	Séries de fonctions méromorphes	109
	Exercices	112
	Solutions des exercices	113

CHAPITRE 9 • PRODUITS INFINIS

9.1	Produits infinis de nombres complexes	116
9.2	Produits infinis de fonctions holomorphes	119
	Exercices	123
	Solutions des exercices	124

CHAPITRE 10 • HOMOTOPIE ET HOLOMORPHIE

10.1	Homotopie et simple connexité	126
10.2	Primitive le long d'un arc	130
10.3	Indice	132
10.4	Formule de Cauchy	135
10.5	Séries de Laurent	137
10.6	Les généralisations	140
	Exercices	142
	Solutions des exercices	143

CHAPITRE 11 • HOLOMORPHIE ET PARTIES LOCALEMENT FINIES

11.1	Produit canonique de Weierstrass	145
11.2	Applications	147
11.3	Idéaux	150
	Exercices	152
	Solutions des exercices	153

CHAPITRE 12 • REPRÉSENTATION CONFORME

12.1	Topologie	154
12.2	Un résultat d'isomorphisme	157
12.3	Conservation des angles	159
	Exercices	160
	Solutions des exercices	162

CHAPITRE 13 • QUELQUES GRANDS CLASSIQUES

13.1	Théorèmes de Picard	164
13.2	Théorème de Runge	169
	Exercices	176
	Solutions des exercices	177

CHAPITRE 14 • FONCTIONS HARMONIQUES	
14.1 Premières propriétés	179
14.2 Représentation intégrale	181
Exercices	184
Solutions des exercices	185
CHAPITRE 15 • QUELQUES CALCULS D'INTÉGRALES	
15.1 Quelques lemmes	186
15.2 Quelques méthodes	188
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	197
INDEX	199