



Grégoire Allaire

Conception optimale de structures



Table des matières

1	Introduction à l'optimisation de formes	1
1.1	Généralités	1
1.2	Exemples	3
1.2.1	Optimisation de l'épaisseur d'une membrane	3
1.2.2	Quelques remarques sur les critères d'optimisation	6
1.2.3	Optimisation de la forme d'une membrane	8
1.2.4	Optimisation de forme en élasticité	12
1.2.5	Optimisation de la forme d'un profil aérodynamique ...	14
1.3	Remarques sur la modélisation	18
1.4	Bibliographie	19
2	Rappels d'analyse numérique	21
2.1	Espaces de Sobolev	21
2.1.1	Définitions et propriétés	21
2.1.2	Théorie de Lax-Milgram	25
2.2	Laplacien à coefficients variables	26
2.2.1	Formulation variationnelle	26
2.2.2	Énergie duale ou complémentaire	31
2.3	Système de l'élasticité	34
2.3.1	Modélisation	34
2.3.2	Analyse	35
2.4	Éléments finis	37
2.4.1	Approximation variationnelle interne	37
2.4.2	Éléments finis \mathbb{P}_1 en dimension $N = 1$	38
2.4.3	Éléments finis en dimension $N \geq 2$	42
2.5	Bibliographie	46
3	Rappels d'optimisation	47
3.1	Minimisation	47
3.1.1	Définitions et notations	47
3.1.2	Existence d'un minimum	48

3.2	Conditions d'optimalité	50
3.2.1	Différentiabilité	51
3.2.2	Inéquation d'Euler pour des contraintes convexes	52
3.2.3	Contraintes d'égalité	53
3.2.4	Contraintes d'inégalité	55
3.3	Point-selle et dualité	57
3.3.1	Point-selle	57
3.3.2	Dualité	58
3.4	Algorithmes numériques	59
3.4.1	Algorithmes de type gradient (cas sans contraintes)	59
3.4.2	Algorithmes de type gradient (cas avec contraintes)	61
3.4.3	Méthode de Newton	65
3.5	Bibliographie	66
4	Contrôle optimal	67
4.1	Introduction	67
4.2	Commande optimale	67
4.3	Optimisation des systèmes distribués	71
4.4	Bibliographie	76
5	Optimisation paramétrique	77
5.1	Introduction	77
5.1.1	Modélisation	77
5.1.2	Continuité de la fonction coût	78
5.2	Théories d'existence	80
5.2.1	Contre-exemple de non-existence d'épaisseur optimale ..	81
5.2.2	Existence pour un modèle discrétisé	86
5.2.3	Existence pour un modèle avec contrainte de régularité .	87
5.3	Méthode de gradient	89
5.3.1	Calcul du gradient continu	89
5.3.2	Algorithme numérique	94
5.4	Le cas auto-adjoint : la compliance	96
5.4.1	Un résultat d'existence	97
5.4.2	Conditions d'optimalité	98
5.4.3	Algorithme numérique	99
5.5	Approche discrète	101
5.5.1	Discrétisation du problème	101
5.5.2	Comparaison des gradients discret et continu	103
5.6	Optimisation de l'épaisseur d'une plaque élastique	106
5.6.1	Modélisation	106
5.6.2	Résultats numériques pour la compliance	107
5.6.3	Un contre-exemple numérique	110
5.6.4	Régularisation	111
5.7	Bibliographie	114

6	Optimisation géométrique	115
6.1	Introduction	115
6.2	Résultats d'existence de solution optimale	117
6.2.1	Un contre-exemple de non-existence de forme optimale .	117
6.2.2	Existence sous une condition géométrique	122
6.2.3	Existence sous une condition topologique	125
6.2.4	Existence sous une condition de régularité	126
6.3	Différentiation par rapport au domaine	128
6.3.1	Définition	128
6.3.2	Dérivation d'intégrales	133
6.3.3	Dérivation d'une fonction dépendant du domaine	136
6.3.4	Dérivation d'une équation par rapport au domaine.....	138
6.4	Gradient et condition d'optimalité	144
6.4.1	Conditions aux limites de Neumann	145
6.4.2	Conditions aux limites de Dirichlet	147
6.4.3	Dérivation rapide : la méthode du Lagrangien	149
6.5	Algorithmes numériques	153
6.5.1	Méthode de gradient	153
6.5.2	Modèle de structure élastique	154
6.5.3	Implémentation numérique	155
6.6	Bibliographie	161
7	Optimisation topologique par méthode d'homogénéisation .	163
7.1	Introduction et motivation	163
7.1.1	Généralités	163
7.1.2	Problème modèle	165
7.1.3	But de la méthode d'homogénéisation	166
7.2	Homogénéisation	167
7.2.1	Position du problème	168
7.2.2	Développements asymptotiques à deux échelles	170
7.2.3	Convergence au sens de l'homogénéisation	173
7.3	Matériaux composites	176
7.3.1	Le cas de la dimension $N = 1$	177
7.3.2	Composites laminés simples.....	178
7.3.3	Composites laminés séquentiels.....	180
7.3.4	Caractérisation variationnelle des coefficients homogénéisés	185
7.3.5	Caractérisation de G_θ et principe d'Hashin-Shtrikman .	186
7.4	Formulation homogénéisée de l'optimisation.....	190
7.4.1	Définition	190
7.4.2	Conditions d'optimalité	191
7.4.3	Algorithme numérique	195
7.5	Généralisation en élasticité	199
7.5.1	Problème modèle	199
7.5.2	Formule de lamination en élasticité	202

7.5.3	Bornes de Hashin et Shtrikman en élasticité	203
7.5.4	Formulation homogénéisée de l'optimisation	206
7.5.5	Algorithme numérique d'optimisation de formes	207
7.5.6	Convexification et "matériaux fictifs".	214
7.6	Bibliographie	218
8	Optimisation évolutionnaire (rédigé par Marc Schoenauer)	221
8.1	Les algorithmes évolutionnaires	221
8.1.1	Le paradigme darwinien	222
8.1.2	Sélections naturelles ...artificielles	225
8.1.3	Sélections multi-critères	227
8.1.4	Les moteurs d'évolution	229
8.1.5	Les algorithmes historiques	230
8.1.6	Représentations et opérateurs de variation	231
8.1.7	Les chaînes de bits	233
8.1.8	Les vecteurs de réels.	234
8.1.9	La programmation génétique	237
8.1.10	Conclusion sur les algorithmes évolutionnaires	241
8.2	Optimisation de formes évolutionnaire	241
8.2.1	Contexte mécanique	242
8.2.2	La fonction de performance	243
8.2.3	Les tableaux de bits	246
8.2.4	Représentation de Voronoï	249
8.2.5	Représentation par barres de Voronoï	253
8.2.6	Résultats comparatifs	256
8.2.7	Résultats multi-critères	257
8.2.8	Optimisation de forme et programmation génétique ...	260
8.2.9	Perspectives	261
8.2.10	Conclusions du chapitre	262
8.3	Bibliographie	263
	Littérature	265
	Index	277