Agrégation
de mathématiques

COURS D'ANALYSE

CALCUL DIFFÉRENTIEL,
INTÉGRATION ET PROBABILITÉS

Préface de Jean-Pierre Kahane

Paul Doukhan
Jean-Claude Sifre

DUNOD

Table des matières

INTRODUCTION XV

CHAPITRE 1 • CALCUL DIFFÉRENTIEL 1

1.1 Des notations 1

1.2 Différentiabilité 1

1.2.1 Application affine tangente 2

1.2.2 Dérivées partielles 3

1.2.3 Dérivée directionnelle 6

1.2.4 Dérivée d'un produit, d'une composée 8

1.2.5 Accroissements finis 12

1.3 Dérivée seconde 19

1.4 Dérivées successives 28

1.4.1 Formules de Taylor 28

1.4.2 Normalité et prolongement 33

1.5 Points critiques, extrema 35

1.5.1 Généralités sur les points critiques et extrema 35

1.5.2 Points critiques non dégénérés 37

1.5.3 Points critiques dégénérés 43

1.5.4 Extrema globaux 46

CHAPITRE 2 • GRANDS THÉORÈMES DU CALCUL CIFFÉRENTIEL 49

2.1 Inversion locale 49

2.1.1 Le résultat général 49

2.1.2 Fonctions implicites 56

2.1.3 Immersions et submersions en dimension finie 59

2.2 Inversion globale 63

2.3 Lemme de Morse 70

2.4 Linéarisation d'une application 77

CHAPITRE 3 • **ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES** 89

3.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz 89
3.1.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz local 89
3.1.2 L'unicité globale : solutions maximales 93
3.1.3 Un autre cas d'existence 94
3.1.4 Le flot 96
3.1.5 Équations différentielles à paramètre 103
3.1.6 Différentiabilité par rapport aux conditions initiales 107

3.2 Comportement global des solutions 110
3.2.1 Inéquations différentielles 110
3.2.2 Limites à l'infini 117

3.3 Équations autonomes 118
3.3.1 Généralités 118
3.3.2 Portrait de phase de l'équation de Newton 120
3.3.3 Stabilité des points fixes 125
3.3.4 Fonctions de Lyapunov à l'infini 128
3.3.5 Confinement de courbes intégrales 130
3.3.6 Un cycle limite : théorème de Liénard 134
3.3.7 Ensemble ω-limite 139
3.3.8 Théorème de Poincaré-Bendixson 141

CHAPITRE 4 • **SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES** 147

4.1 Cas des coefficients constants 147
4.1.1 Usage de l'exponentielle de matrice 147
4.1.2 Solutions explicites 149

4.2 Variation des constantes 151
4.2.1 Cas général 151
4.2.2 La présentation de Lagrange 153
4.2.3 Comportement asymptotique des solutions 156

4.3 Entrelacement des zéros 163

4.4 Équations différentielles holomorphes 169
4.4.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz holomorphe 169
4.4.2 Singularités des équations différentielles linéaires 173
4.4.3 Points singuliers réguliers 176

CHAPITRE 5 • **FONCTIONS ANALYTIQUES** 183

5.1 Intégration des 1-formes différentielles 183
5.1.1 1-formes différentielles continues 183
5.1.2 Simple connexité et homotopie des chemins 190
5.1.3 Formes différentielles et résidus en dimension 2 195
5.1.4 1-formes différentielles différentiables 199
5.1.5 1-formes différentielles complexes en dimension 2 201

5.2 Fonctions holomorphes 202
5.2.1 Propriétés élémentaires 202
5.2.2 La formule de Cauchy 205
5.2.3 Inversion des fonctions holomorphes 210

5.2.4 Linéarisation holomorphe 213
5.2.5 Applications de la formule de Cauchy 216

5.3 Prolongement analytique 218

5.4 Singularités isolées et fonctions méromorphes 225
5.4.1 Développements de Laurent 225
5.4.2 Points singuliers isolés 229
5.4.3 Théorème des résidus 231
5.4.4 Fonctions méromorphes 238
5.4.5 Calcul fonctionnel (matriciel) holomorphe 241

5.5 Comportement au bord d'un disque 244

CHAPITRE 6 • **GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE** 251

6.1 Sous-variété de $\mathbb{R}^d$ 251
6.1.1 Topologie des sous-variétés de $\mathbb{R}^d$ 251
6.1.2 Applications régulières 256
6.1.3 Application tangente 257
6.1.4 Immersions, submersions 259

6.2 Les fibrés vectoriels usuels 261
6.2.1 Fibré tangent 261
6.2.2 Sous-fibré vectoriel de $S \times \mathbb{R}^n$ 263
6.2.3 Morphisme de sous-fibrés vectoriels de $S \times \mathbb{R}^n$ 268
6.2.4 Fibré normal 269

6.3 Partition différentiable de l'unité 274
6.3.1 Paracompacité des sous-variétés de $\mathbb{R}^d$ 274
6.3.2 Application : orientation relative 276

6.4 Champs de vecteurs, Hessienne 277

6.5 Extrema liés 279

6.6 Équations aux dérivées partielles quasi-linéaires 282

CHAPITRE 7 • **DÉCOMPOSITION DES MESURES** 287

7.1 Mesures réelles et complexes 287
7.1.1 Mesures sur $\mathbb{R}$ 288
7.1.2 Valeur absolue d'une mesure 289
7.1.3 Décomposition de Hahn 294

7.2 Décomposition de Lebesgue 295
7.2.1 Absolue continuité 296
7.2.2 Mesures étrangères 299
7.2.3 Théorème de Radon-Nikodym 300

7.3 Mesures de Radon complexes 302
7.3.1 Valeur absolue d'une mesure de Radon 302
7.3.2 Mesures de Radon bornées 304
7.3.3 Représentation de Riesz, cas général 305

CHAPITRE 8 • DUALITÉ ET INTÉGRATION 309
8.1 Dualité des espaces L^p 309
8.1.1 Le cas $p < +\infty$ 309
8.1.2 Le cas $p = +\infty$ 311
8.2 Convergence des mesures 313
8.2.1 Équi-intégrabilité 313
8.2.2 Théorème de Vitali-Hahn-Saks 316
8.2.3 Convergence vague des mesures de Radon 319
8.2.4 Approximation de l'unité 321

CHAPITRE 9 • INTÉGRATION PAR PARTIES 323
9.1 Variation bornée et intégration 323
9.1.1 Intégrale de Stieltjes d'une fonction continue 324
9.1.2 Intégrale de Stieltjes d'une fonction réglée 326
9.2 Intégration et dérivation 328
9.2.1 Intégration d'une dérivée 328
9.2.2 Intégration par parties 331
9.2.3 Application aux développements asymptotiques 334
9.2.4 Fonction Gamma et intégrale fractionnaire 335

CHAPITRE 10 • TRANSFORMATIONS INTÉGRALES 339
10.1 Espaces de fonctions intégrables 340
10.1.1 Moyennes dans L^p 340
10.1.2 Espaces de Sobolev 343
10.1.3 Espaces de Besov 344
10.2 Approximations de l'unité 345
10.3 Transformation de Fourier 348
10.3.1 Transformation de Fourier dans L^1 348
10.3.2 L'inversion L^1 351
10.3.3 L'inversion L^2 355
10.4 Opérateurs intégraux 356
10.4.1 Noyaux séparables 358
10.4.2 Approximation par un noyau séparable 361
10.4.3 Formules de Fredholm 363
10.4.4 Équations de Volterra 365
10.4.5 Opérateurs de Hilbert-Schmidt 368
10.4.6 Noyaux symétriques 370
10.4.7 Problème de Sturm-Liouville 378

CHAPITRE 11 • ONDELETTES 385
11.1 Analyse multirésolution 385
11.2 Construction d'ondelettes 389
11.3 Construction d'une ondelette 391
11.4 Ondelettes et espaces de suites 395
11.5 Ondelettes et espaces fonctionnels 396

CHAPITRE 12 • **PROBABILITÉS** 401

12.1 Lois et variables aléatoires 402

12.1.1 Lois simples 408

12.2 Sommes de variables aléatoires indépendantes 409

12.2.1 Indépendance 409

12.2.2 Loi du $0-1$ 412

12.3 Loi des grands nombres 413

12.3.1 Loi faible des grands nombres 413

12.3.2 Vitesses dans la loi faible des grands nombres 415

12.3.3 Loi forte des grands nombres 419

12.4 Convergence en loi 421

12.4.1 Notions de convergence 421

12.4.2 Théorème de Limite Centrale 424

12.5 Espérance conditionnelle 428

12.5.1 Définitions et calculs 428

12.5.2 Théorème ergodique 434

12.5.3 Chaînes de Markov 438

12.5.4 Martingales 446

ANNEXE A • **COURBES DE JORDAN** 453

ANNEXE B • **DISTRIBUTIONS** 467

B.1 Définitions 467

B.2 Dérivation et intégration des distributions 470

B.3 Distributions et variation bornée 471

BIBLIOGRAPHIE 475

GLOSSAIRE 479

INDEX 481