

Jean-Michel Bony

---

# Cours d'analyse

Théorie des distributions  
et analyse de Fourier



LES ÉDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

# Table des matières

<b>Introduction</b> .....	1
<b>1. L'intégrale de Lebesgue</b> .....	7
1.1. Intégrale des fonctions positives .....	7
1.2. Fonctions sommables .....	11
1.3. Cas de la dimension 1 .....	16
1.4. Intégrales multiples .....	18
1.5. Espaces $\mathcal{L}^1$ , $\mathcal{L}^2$ , $\mathcal{L}^\infty$ .....	20
1.6. Sur la construction de l'intégrale .....	22
1.7. Les quatre opérations .....	25
<b>2. Topologie générale et espaces fonctionnels</b> .....	29
2.1. Espaces métriques (propriétés topologiques) .....	29
2.2. Espaces métriques (propriétés uniformes) .....	32
2.3. Espaces métriques compacts .....	35
A. Généralités .....	35
B. Exemples et applications .....	38
C. Partitions de l'unité .....	42
2.4. Espaces vectoriels normés .....	44
2.5. Espaces de Hilbert .....	48
2.6. Espaces fonctionnels classiques .....	56
2.7. Séries de Fourier .....	64

<b>3. Fonctions différentiables et approximation</b>	69
3.1. Espaces de fonctions différentiables	69
3.2. Partitions de l'unité $C^\infty$	73
3.3. Convolution	76
3.4. Régularisation	79
3.5. Approximation dans un ouvert	82
<b>4. Les distributions</b>	85
4.1. Introduction	85
4.2. Définition et convergence	88
4.3. Dérivées	90
4.4. Exemples de distributions	92
A. Fonctions localement sommables	92
B. Mesures de Radon	94
C. Multipôles, couches multiples	96
D. Valeurs principales et parties finies	97
<b>5. Opérations sur les distributions</b>	99
5.1. Opérations élémentaires	99
5.2. Multiplication par les fonctions $C^\infty$	101
5.3. Dérivation (dimension 1)	102
5.4. Dérivation (dimension quelconque)	106
A. Formule de Stokes (cas d'un surgraphe)	106
B. Formule de Stokes (cas d'un ouvert régulier)	108
C. Formule des sauts dans l'espace	111
D. Applications	112
<b>6. Espaces particuliers de distributions</b>	115
6.1. Distributions à support compact	115
6.2. Espaces de Sobolev d'ordre entier	119
A. Notions de régularité	119
B. Définition et propriétés	120
C. Applications	124
6.3. Distributions périodiques	128

<b>7. Convolution</b> .....	131
7.1. Préliminaires .....	131
7.2. Convolution d'une distribution et d'une fonction $C^\infty$ .....	135
7.3. Convolution et translations .....	138
A. Propriété caractéristique de la convolution .....	138
B. Interprétation physique .....	140
7.4. Convolution des distributions .....	142
7.5. Mode d'emploi .....	146
A. Conditions de Définition .....	146
B. Propriétés fondamentales .....	147
C. Modes de calcul .....	147
<b>8. Quelques équations de la physique mathématique</b> .....	149
8.1. Généralités sur les équations de convolution .....	149
8.2. Équations de Laplace et de Poisson .....	151
8.3. Équation des ondes .....	154
8.4. Équations différentielles et intégrales .....	159
<b>9. Transformation de Fourier</b> .....	163
9.1. Transformation de Fourier des fonctions sommables .....	163
9.2. L'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz .....	167
9.3. L'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées .....	170
9.4. Transformation de Fourier des distributions tempérées .....	173
A. Résultats généraux .....	173
B. Transformation de Fourier dans $\mathcal{E}'$ .....	175
C. Transformation de Fourier dans $L^2$ .....	177
9.5. Les propriétés fondamentales .....	178
A. L'échange de la convolution et de la multiplication .....	178
B. Équations de convolution .....	181
9.6. Transformation de Fourier partielle et équations d'évolution ....	184
9.7. Vers l'analyse microlocale .....	189
9.8. Transformation de Laplace .....	191

<b>10. Espaces de Sobolev</b>	195
10.1. Structure hilbertienne et dualité	195
10.2. Régularité et caractère local	198
10.3. Traces et prolongements	200
A. Trace d'une fonction définie dans $\mathbb{R}^n$	200
B. L'espace $H^1(\mathbb{R}_+^n)$	203
10.4. Problème de Dirichlet dans un ouvert régulier	206
A. Traces	207
B. Problème de Dirichlet homogène	209
C. Problème de Dirichlet non homogène	211
D. Vers l'analyse spectrale	213
10.5. Problème de Cauchy et semi-groupes	214
<b>A. Compléments de calcul différentiel</b>	221
A.1. Applications différentiables	221
A.2. Hypersurfaces	224
A.3. Intégrale de surface	228
A.4. Cartes et sous-variétés	231
<b>B. Espaces de Baire</b>	235
B.1. Résultats fondamentaux	235
B.2. Quelques applications	236
<b>C. Espaces de Fréchet</b>	239
C.1. Espaces localement convexe métrisables	239
C.2. Exemples d'espaces de Fréchet	241
C.3. Le théorème de Banach-Steinhaus	243
C.4. Continuité des applications bilinéaires	246
<b>Bibliographie</b>	249
<b>Index</b>	251
Index des notations	262
Principaux espaces fonctionnels	263

