

Daniel Li

Cours d'analyse fonctionnelle

avec 200 exercices corrigés



ellipses

Table des matières

Préface

iii

I. Espaces normés

1

I.1. Espaces vectoriels normés	1
I.1.1. Norme	1
I.1.2. Quelques exemples usuels	4
I.1.3. Espaces de Banach	9
I.1.4. Applications linéaires	12
I.1.5. Normes équivalentes	14
I.2. Espaces vectoriels normés de dimension finie	15
I.2.1. Equivalence des normes	15
I.2.2. Compacité des boules	17
I.3. Exercices	19

II. Espaces de Hilbert

27

II.1. Généralités	27
II.1.1. Définitions	27
II.1.2. Propriétés élémentaires	28
II.1.3. Orthogonalité	30
II.1.4. Espaces de Hilbert	31
II.2. Le Théorème de projection et ses conséquences	32
II.2.1. Le Théorème de projection	32
II.2.2. Conséquences	34
II.2.3. Représentation du dual	38
II.2.4. Adjoint d'un opérateur	39
II.3. Bases orthonormées	40
II.3.1. Espaces séparables	40
II.3.2. Systèmes orthonormés	41
II.3.3. Bases orthonormées	43
II.3.4. Existence des bases orthonormées	45
II.4. Séparabilité de $L^2(0, 1)$	46
II.4.1. Théorème de Stone-Weierstrass	46
II.4.2. Le système trigonométrique	53
II.5. Exercices	62

III. Convolution et intégrales de Fourier sur \mathbb{R}	75
III.1. Convolution	75
III.1.1. Introduction	75
III.1.2. Existence dans le cas " $L^p - L^q$ "	76
III.1.3. Existence dans le cas " $L^1 - L^\infty$ "	79
III.1.4. Existence dans le cas " $L^1 - L^1$ "	81
III.1.5. Propriétés de régularité de la convolution	85
III.2. Transformation de Fourier	87
III.2.1. Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$	87
III.2.2. Le théorème d'inversion	91
III.2.3. Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$	94
III.3. Exercices	98
III.3.1. Convolution	98
III.3.2. Transformation de Fourier	101
IV. Le Théorème de Baire et ses conséquences	111
IV.1. Le Théorème de Baire	111
IV.2. Le Théorème de Banach-Steinhaus	112
IV.3. Le Théorème de l'application ouverte	114
IV.4. Exercices	119
V. Théorème de Radon-Nikodým et applications	125
V.1. Mesures réelles et mesures complexes	125
V.1.1. Variation d'une mesure	125
V.1.2. Absolue continuité	130
V.1.3. Mesures singulières	131
V.2. Le Théorème de Radon-Nikodým	132
V.3. Applications	136
V.3.1. Décomposition polaire d'une mesure et intégration par rapport à une mesure complexe	136
V.3.2. Caractère complet de $\mathcal{M}(S)$	138
V.3.3. Dual de $L^p(m)$	139
V.4. Exercices	147
VI. Le Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences	153
VI.1. Forme analytique du Théorème de Hahn-Banach	153
VI.2. Quelques conséquences de la forme analytique du Théorème de Hahn-Banach	156
VI.3. La forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach	159
VI.4. Exercices	165
VII. Notions de Théorie Spectrale	171
VII.1. Spectre d'un opérateur	171
VII.1.1. Opérateurs inversibles	171
VII.1.2. Spectre	172
VII.1.3. Rayon spectral	174

VII.2. Opérateurs compacts	177
VII.2.1. Propriétés générales	177
VII.2.2. Opérateur adjoint	179
VII.2.3. Propriétés spectrales des opérateurs compacts	180
VII.3. Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert	184
VII.3.1. Opérateurs auto-adjoints	184
VII.3.2. Spectre des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert	185
VII.3.3. Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts	187
VII.4. Annexe : Théorème d'Ascoli	189
VII.5. Exercices	192
VIII. Dualité	199
VIII.1. Topologie faible	199
VIII.1.1. Définition	199
VIII.1.2. Convergence	201
VIII.1.3. Convergence faible dans l'espace des fonctions continues	203
VIII.1.4. Quelques propriétés de la topologie faible	204
VIII.1.5. Métrisabilité	206
VIII.2. Topologie *-faible sur un dual	208
VIII.2.1. Définition	209
VIII.2.2. Réflexivité	211
VIII.2.3. Métrisabilité	213
VIII.2.4. Applications	215
VIII.3. Annexe 1 : Représentation du dual de $\mathcal{C}_0(L)$	216
VIII.4. Annexe 2 : Théorème de Tychonov	220
VIII.4.1. Filtres et ultrafiltres	220
VIII.4.2. Limite selon un filtre	221
VIII.4.3. Compacité et filtres.	221
VIII.5. Exercices	223
IX. Espaces de Sobolev	233
IX.1. Introduction	233
IX.1.1. Équation du pendule	233
IX.1.2. Stratégie	233
IX.2. Espaces de Sobolev	234
IX.2.1. Dérivées faibles.	234
IX.2.2. Espaces de Sobolev	237
IX.2.3. Théorèmes d'immersion	238
IX.3. Retour à l'équation du pendule	240
IX.4. Exercices	244
X. Notions sur les distributions	249
X.1. Définitions	249
X.1.1. Espace de fonctions-test	249

X.1.2. Distributions	250
X.2. Exemples	252
X.2.1. Fonctions localement intégrables	252
X.2.2. Mesures	253
X.2.3. Distributions d'ordre ≥ 1	255
X.2.4. Valeur principale	256
X.2.5. Parties finies	257
X.3. Opérations sur les distributions	258
X.3.1. Multiplication par une fonction de classe C^∞	258
X.3.2. Dérivation.	258
X.4. Théorème de structure	260
X.4.1. Support d'une distribution	261
X.5. Transformation de Fourier	262
X.5.1. Impossibilité de définir la transformée de Fourier pour toutes les distributions	263
X.5.2. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz des fonctions indéfiniment déri- vables à décroissance rapide	263
X.5.3. Distributions tempérées	266
X.6. Exercices	270
XI. Corrigés des exercices	275
XI.1. Exercices du Chapitre I	275
XI.2. Exercices du Chapitre II	295
XI.3. Exercices du Chapitre III	323
XI.3.1. Convolution	323
XI.3.2. Transformation de Fourier	333
XI.4. Exercices du Chapitre IV	352
XI.5. Exercices du Chapitre V	363
XI.6. Exercices du Chapitre VI	375
XI.7. Exercices du Chapitre VII	383
XI.8. Exercices du Chapitre VIII	393
XI.9. Exercices du Chapitre IX	413
XI.10. Exercices du Chapitre X	421
Bibliographie sommaire	439
Index terminologique	441