

# Exercices & Problèmes

Licence

## ANALYSE

- ▶ Rappels de cours
- ▶ Exercices et problèmes avec corrigés détaillés
- ▶ Fiches de révision

***Maurice Gaultier***

# Table des matières

<b>Avant-propos .....</b>	iii
<b>Chapitre 1 Suites à termes réels ou complexes .....</b>	1
Rappel de cours .....	1
1.1 Généralités .....	1
1.2 Suites à termes réels.....	3
1.3 Suites définies par une relation de récurrence.....	4
Énoncés des exercices et des problèmes .....	6
Corrigés des exercices et des problèmes .....	10
Fiche de révision .....	26
<b>Chapitre 2 Fonctions numériques : limite, continuité, dérivabilité .....</b>	28
Rappel de cours .....	28
2.1 Généralités .....	28
2.2 Notion de limite en un point.....	28
2.3 Continuité en un point. Continuité uniforme .....	29
2.4 Fonctions monotones .....	31
2.5 Fonctions inverses ou réciproques.....	32
2.6 Dérivées .....	34
Énonces des exercices et des problèmes .....	37
Corrigés des exercices et des problèmes .....	39
Fiche de révision .....	52
<b>Chapitre 3 Dérivation des fonctions numériques .....</b>	54
Rappel de cours .....	54
3.1 Compléments sur la dérivabilité .....	54

3.2 Développements de Taylor et de Mac-Laurin .....	55
3.3 Développements limités (en abrégé DL) .....	55
3.4 Étude locale des fonctions réelles d'une variable réelle .....	58
Énoncés des exercices et des problèmes .....	61
Corrigés des exercices et des problèmes .....	63
Fiche de révision .....	75
<b>Chapitre 4 Intégration des fonctions numériques .....</b>	<b>77</b>
Rappel de cours .....	77
4.1 Notion de mesure .....	77
4.2 Fonctions en escalier .....	78
4.3 Intégration d'une fonction bornée sur un segment.....	80
4.4 Exemples. Formule de la moyenne. Inégalités .....	83
Énoncés des exercices et des problèmes .....	84
Corrigés des exercices et des problèmes .....	87
Fiche de révision .....	98
<b>Chapitre 5 Primitives. Intégrales indéfinies .....</b>	<b>100</b>
Rappel de cours .....	100
5.1 Primitives .....	100
5.2 Intégrales indéfinies .....	101
Énoncés des exercices et des problèmes .....	102
Corrigés des exercices et des problèmes .....	103
Fiche de révision .....	110
<b>Chapitre 6 Méthodes d'intégration .....</b>	<b>111</b>
Rappel de cours .....	111
6.1 Méthode de changement de variable .....	112
6.2 Intégration par parties.....	114
6.3 Intégration des fractions rationnelles .....	116

Énoncés des exercices et des problèmes .....	117
Corrigés des exercices et des problèmes .....	119
Fiche de révision .....	130
<b>Chapitre 7 Équations différentielles du premier ordre.....</b>	<b>131</b>
Rappel de cours .....	131
7.1 Quelques généralités .....	131
7.2 Équations à variables séparées .....	132
7.3 Équations homogènes .....	132
7.4 Équations linéaires .....	133
7.5 Équations se ramenant au cas linéaire .....	135
7.6 Équations de Clairaut et de Lagrange .....	135
Énoncés des exercices .....	136
Corrigés des exercices et des problèmes .....	139
Fiche de révision .....	158
<b>Chapitre 8 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre .....</b>	<b>160</b>
Rappel de cours .....	160
8.1 Quelques généralités .....	160
8.2 Équations homogènes à coefficients constants .....	162
8.3 Équations non homogènes à coefficients constants .....	162
Énoncés des exercices et des problèmes .....	165
Corrigés des exercices et des problèmes .....	167
Fiche de révision .....	183
<b>Chapitre 9 Éléments de la topologie de <math>\mathbb{R}^n</math> .....</b>	<b>185</b>
Rappel de cours .....	185
9.1 Fonction distance. Espaces métriques .....	185
9.2 Espaces vectoriels normés .....	186
9.3 Ensembles ouverts. Intérieur. Voisinages .....	186

9.4 Ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ . Adhérence. Densité .....	187
9.5 Parties bornées. Parties compactes .....	188
9.6 Connexité .....	189
Énoncés des exercices et des problèmes .....	189
Corrigés des exercices et des problèmes .....	192
Fiche de révision .....	201
<b>Chapitre 10 Fonctions définies dans <math>\mathbb{R}^n</math> .....</b>	<b>203</b>
Rappel de cours .....	203
10.1 Suites convergentes dans $\mathbb{R}^n$ .....	203
10.2 Limite. Continuité .....	203
10.3 Fonctions différentiables .....	204
10.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur. Formule de Taylor .....	209
Énoncés des exercices et des problèmes .....	211
Corrigés des exercices et des problèmes .....	214
Fiche de révision .....	226
<b>Chapitre 11 Intégrales improches .....</b>	<b>228</b>
Rappel de cours .....	228
11.1 Intégration sur un intervalle non borné .....	228
11.2 Intégration d'une fonction non bornée sur un intervalle borné .....	230
11.3 Utilisation des méthodes d'intégration .....	232
Énoncés des exercices et des problèmes .....	235
Corrigés des exercices et des problèmes .....	238
Fiche de révision .....	258
<b>Chapitre 12 Séries numériques .....</b>	<b>260</b>
Rappel de cours .....	260
12.1 Généralités .....	260
12.2 Séries à termes réels non négatifs .....	262

12.3 Séries absolument convergentes .....	265
12.4 Séries à termes réels non absolument convergentes.....	266
<b>Énoncés des exercices et des problèmes .....</b>	<b>267</b>
<b>Corrigés des exercices et des problèmes .....</b>	<b>271</b>
Fiche de révision .....	289
 <b>Chapitre 13 Suites et séries de fonctions.....</b>	<b>291</b>
Rappel de cours .....	291
13.1 Continuité et dérivabilité d'une fonction d'une variable complexe à valeurs complexes .....	291
13.2 Suites de fonctions.....	292
13.3 Séries de fonctions .....	294
<b>Énoncés des exercices et des problèmes .....</b>	<b>297</b>
<b>Corrigés des exercices et des problèmes .....</b>	<b>300</b>
Fiche de révision .....	314
 <b>Chapitre 14 Séries entières d'une variable .....</b>	<b>316</b>
Rappel de cours .....	316
14.1 Séries entières d'une variable complexe .....	316
14.2 Fonction exponentielle complexe. Logarithme complexe .....	319
14.3 Développement en série entière d'une fonction réelle d'une variable réelle..	322
14.4 Développements en série entière usuels .....	325
<b>Énoncés des exercices et des problèmes .....</b>	<b>326</b>
<b>Corrigés des exercices et des problèmes .....</b>	<b>328</b>
Fiche de révision .....	345
 <b>Chapitre 15 Séries trigonométriques .....</b>	<b>347</b>
Rappel de cours .....	347
15.1 Quelques résultats préliminaires.....	347
15.2 Coefficients d'un polynôme trigonométrique .....	349

15.3 Coefficients d'une série trigonométrique uniformément convergente .....	351
15.4 Développement en série de Fourier d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes.....	352
Énoncés des exercices et des problèmes .....	353
Corrigés des exercices et des problèmes .....	360
Fiche de révision .....	385
<b>Chapitre 16 Fonctions analytiques .....</b>	<b>387</b>
Rappel de cours .....	387
16.1 Dérivée complexe. Conditions de Cauchy.....	387
16.2 Fonctions holomorphes dans un ouvert .....	388
16.3 Fonctions analytiques.....	389
16.4 Exemples de fonctions holomorphes .....	390
Énoncés des exercices et des problèmes .....	392
Corrigés des exercices et des problèmes .....	395
Fiche de révision .....	409
<b>Chapitre 17 Séries de Taylor et de Laurent. Méthode des résidus .....</b>	<b>411</b>
Rappel de cours .....	411
17.1 Intégrale d'une fonction complexe le long d'une courbe .....	411
17.2 Séries de Taylor et de Laurent .....	412
17.3 Méthode des résidus .....	413
17.4 Application de la méthode des résidus au calcul d'intégrales .....	415
Énoncés des exercices et des problèmes .....	418
Corrigés des exercices et des problèmes .....	419
Fiche de révision .....	433
<b>Index .....</b>	<b>435</b>