



N° Réf :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
en: - Filière mathématiques fondamentales
- Spécialité mathématiques fondamentales et appliquées

Etude d'un système dynamique a comportement chaotique

Préparé par :

- Sennoune Ahmed
- Guessoum Mohamed Ridha

Soutenue devant le jury :

- | | |
|---------------------------------|---------------|
| - Président : M.S. Abd Elouahab | Grade : M.C.B |
| - Examineur : R. Ahmed Yahya | Grade : M.A.A |
| - Promoteur : R. Bouden | Grade : M.A.A |

Année universitaire :2013/2014



Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et le miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos profonds remerciements et nos profondes reconnaissances à nos PARENTS.

*Un remerciement particulier à notre encadreur Mr : "**Bouden Rabeh**" pour sa présence, ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.*

*Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury Mr : **M.S. ABD ELOUAHAB** et Mme : **Rakia Ahmed Yahya** pour l'honneur qu'il nous ont accordé en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions. Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*





Remerciements

Nous remercions dieu tout Puissant de nous avoir permis de mener à terme ce projet qui est pour nous le point de départ d'une merveilleuse aventure, celle de la recherche, source de remise en cause permanente et de perfectionnement perpétuelle.

Cette première expérience sera très importante pour notre carrière et les tâches auxquelles vous nous avez associé nous ont vraiment permis de consolider nos connaissances et d'en développer de nouvelles.

Il nous est très agréable d'exprimer notre gratitude ainsi que notre profonde reconnaissance à Monsieur « Dib abd elbrahim » notre encadreur pour son soutien constant, son aide précieuse et ses conseils attentifs durant tout le projet.

Nous nous sentons également redevable à l'égard de tous les Professeurs et Assistants du Département Informatique, pour le savoir qu'ils nous ont transmis.

Enfin, Nous exprimons nos plus vifs remerciements à toute personne qui nous a aidé à élaborer ce travail de proche ou de loin.



Dédicace

A chaque fois qu'on achève une étape importante dans notre vie, On fait une pose pour regarder en arrière et se rappeler toutes ces personnes

Zui ont partagé avec nous tous les bons moments de notre existence, mais, Surtout les mauvais.

Ces personnes qui nous ont aidés sans le leur dire, soutenus sans réserve, aimé

Sans compte r, Ces personnes à qui notre bonheur devient directement le leur, à Se transforme en pleur.

Je dédie ce modeste travail en signe de reconnaissance et de respect.

A mon très cher père qui ma donné tout ces pouvoir et tout Son temps a moi et a tous mon parcoure d'étude il ma donné le courage,

la volonté, la confiance a moi-même, merci beaucoup mon Père. A ma très chère mère la Meilleure femme du monde qu'elle a était comme une bougie brûlée

brule pour ses fils et sa famille, merci ma mère.

A mes frères & mes sœurs

A toute ma famille

A tous mes amies.

Ahmed et Ridha

Table des matières

Introduction Générale	4
1 La stabilité d'un système dynamique	6
1.1 Introduction	6
1.2 Stabilité d'un système linéaire dans \mathbb{R}^2	7
1.2.1 Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr,det)	11
1.3 Système non linéaire	13
1.3.1 Linéarisation d'un système non linéaire	13
1.3.2 La stabilité d'un système non linéaire	14
1.4 Le critère de Routh-Hurwitz	17
1.4.1 Critère de Routh-Hurwitz dans \mathbb{R}^3	19
2 Systèmes dynamiques et chaos	21
2.1 Notions de système dynamique	21
2.1.1 Flot et points fixes	21
2.1.2 Trajectoire (Orbite)	23
2.1.3 Attracteurs et bassin d'attraction	23
2.1.4 Les différents types d'attracteurs	23
2.2 Bifurcations	25
2.2.1 Les bifurcations locales	25
2.2.2 Les types des bifurcations	26
2.3 Chaos	32
2.3.1 Définition du chaos	33

2.3.2	Caractérisation du chaos	33
2.3.3	Propriétés du chaos	34
2.4	Exposants de Lyapunov	35
2.4.1	Exposant de Lyapunov pour une application unidimensionnelle . .	36
2.4.2	Spectre de Lyapunov pour une application multidimensionnelle . .	37
2.4.3	Exposant de Lyapunov pour un système continu	38
2.4.4	Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov	39
2.5	La méthode de résolution numérique (Runge-Kutta)	40
3	Application sur le système de Lorenz	42
3.1	Le modèle de Lorenz	42
3.2	Les équations du modèle	42
3.2.1	L'équilibre du modèle	43
3.2.2	Les exposantes de Lyapunov	50
	Bibliographie	52

Liste des Figures

1.2.1 Point selle (col) instable	8
1.2.2 Nœud propre ou impropre stable	9
1.2.3 Foyer stable	10
1.2.4 Centre stable	10
1.2.5 Diagramme de stabilité	13
2.1.1 Attracteurs réguliers	24
2.1.2 Attracteur étrange de Lorenz	25
2.2.3 Conventions graphiques	26
2.2.4 Diagramme du bifurcation noeud-col	27
2.2.5 Bifurcation noeud-col: $r + x^2$	28
2.2.6 Diagramme de bifurcation noeud-col	28
2.2.7 Bifurcation transcritique $rx - x^2$	29
2.2.8 Diagramme de bifurcation transcritique	30
2.2.9 Diagramme de la bifurcation.fourche (pitchfork)	30
2.2.10 Bifurcation fourche: $rx - x^3$	31
2.2.11 Diagramme de bifurcation fourche	32
2.3.12 Le diagramme du bifurcation de la fonction logistique	35
3.2.1 La solution de système de Lorenz	49
3.2.2 Attracteur de système de Lorenz	49
3.2.3 Les exposants de Lyapunov du système de Lorenz pour $(\sigma = 10, b = \frac{8}{3},$ $r = 28)$	50

Introduction Générale

Un système dynamique consiste en un espace de phase dont les coordonnées décrivent l'état dynamique du système à n'importe quel moment et dont une règle dynamique spécifie la tendance future immédiate de toutes les variables d'état composant le système, donnée par la valeur présente de ces mêmes variables d'état.

Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite. . .) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation.

A la fin du 19^{ème} siècle le mathématicien **Henri Poincaré** a mis en évidence l'imprévisibilité d'un système de trois corps en interaction. Maintenant la théorie du chaos est utilisée dans de très nombreux domaines : géophysique, météorologie, astronomie, turbulence, économie, biologie...

En 1963; le météorologue **Edward Lorenz** expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par hasard qu'il observa qu'une modification minimale des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de mettre en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales [3]. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés systèmes chaotiques. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Le chaos n'est pas aussi "chaotique" que sa dénomination le laisse entendre; son désordre n'est qu'apparent. Un système chaotique est imprévisible, mais il est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps: la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, l'instant initial permet le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Le lien entre ces deux notions paradoxales, déterministe et imprévisibilité, se manifeste par la sensibilité aux

conditions initiales : deux conditions initiales quasiment semblables peuvent conduire à des états très différents du système. Cette impossibilité pratique à calculer l'évolution des systèmes déterministes est la principale caractéristique des systèmes chaotiques.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en trois chapitres qui sont présenté comme suit:

Le 1^{er} chapitre, on étudier la stabilité d'un système dynamique (linéaire et non linéaire) et à la fin de ce chapitre on présente une méthode algébrique pour etudier la stabilité (**Routh-Hurwitz**).

Le 2^{ème} chapitre, on rappelle quelques notions du système dynamique, les types des bifurcations, chaos, exposant de **Lyapunov**, pour finir, on donne une méthode de la résolution numérique (**Runge Kutta**).

Le 3^{ème} chapitre, on le consacre pour l'application sur le système de **lorenz** (la stabilité, résolution numérique et calculer l'exposant de Lyapunov par un programme matlab).

Chapitre 1

La stabilité d'un système dynamique

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité d'un système linéaire dans \mathbb{R}^2 et non linéaire avec deux méthodes (linéarisation autour des points fixes et la fonction de **Lyapunov**), à la fin on donne une méthode algébrique pour étudier la stabilité (**Routh-Hurwitz**).

1.1 Introduction

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme " système " fait référence à un ensemble de variable d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé " espace des phases ". On considère le système d'équations différentielles ordinaires autonomes suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \dots (s)$$

Où f et g sont des fonctions des variables x et y . On parle encore de **système différentiel**, ou de **système dynamique**.

En utilisant la notation matricielle, on peut aussi écrire :

$$\dot{X} = \phi(X)$$

$X = (x, y)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2 et $\phi(X) = (f(x, y), g(x, y))$ une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Une solution de ce système consiste en un couple des fonctions $(x(t), y(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, qui satisfait le système (s).

Définition 1.1.1 On appelle **point d'équilibre** de (s) une solution constante $c = (x^*, y^*)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x^*, y^*) = 0 \\ \dot{y} = g(x^*, y^*) = 0 \end{cases} \dots (s)$$

On appelle **plan de phase** le plan (x, y) .

La représentation des trajectoires dans le plan de phase s'appelle **le portrait de phase**.

1.2 Stabilité d'un système linéaire dans \mathbb{R}^2

Dans cette section nous discutons les différents portraits des phases qui sont possibles dans \mathbb{R}^2 pour le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax \tag{1.2.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice carrée (2×2) .

Nous commençons par le portrait de phase pour le système

$$\dot{x} = Bx \tag{1.2.2}$$

où B à les formes:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Le portrait de phase de (1.2.1) s'obtient à partir du portrait de (1.2.2) en utilisant la

transformation des coordonnées.

Cas $N=1$:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Dans ce cas la solution de (1.2.2) est donnée par :

$$x(t) = \exp(Bt)x_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\mu t} \end{bmatrix}$$

Donc :

- Si $\lambda < 0 < \mu$ le système (1.2.2) possède à l'origine comme **point selle (col)**.

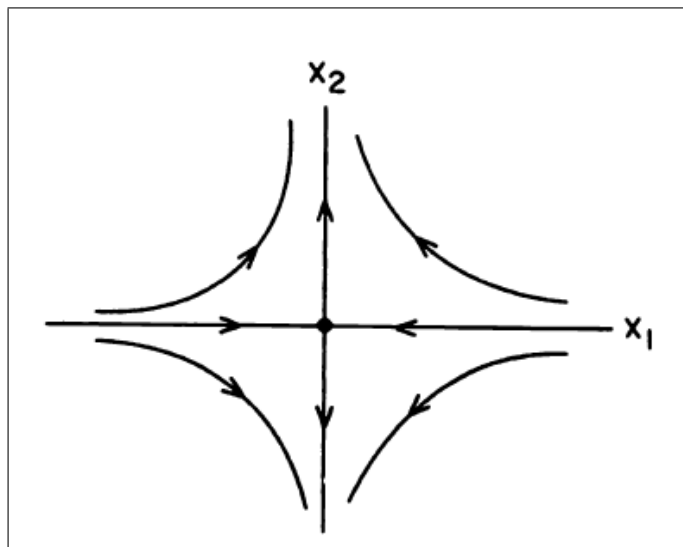


Figure 1.2.1 : Point selle (col) instable

- Si $\lambda > 0 > \mu$ dans ce cas les flèches dans la figure (1.2.1) seront inversés.

Cas $N=2$:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

avec $\lambda < \mu < 0$ donc la solution de (1.2.2) est donnée par :

$$x(t) = \exp(Bt)x_0 = \left(\exp \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t\right)x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas l'origine est un **nœud stable**.

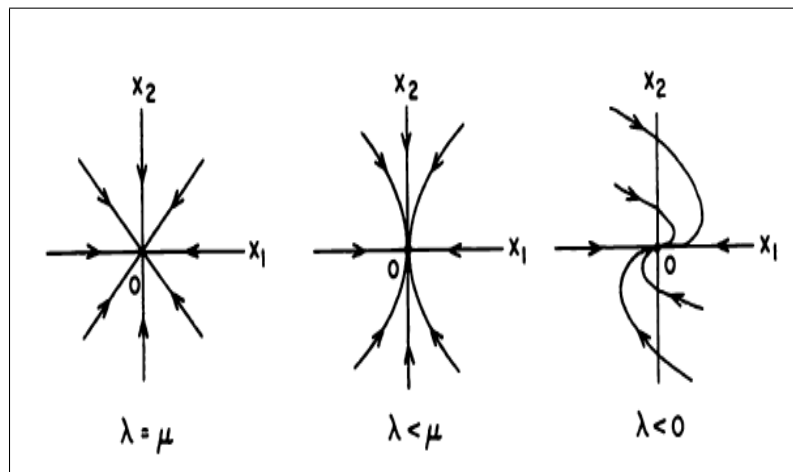


Figure 1.2.2 : Nœud propre ou impropre stable

Dans le cas $\lambda \geq \mu > 0$ ou $\mu \geq \lambda > 0$ les flèches seront inversé et l'origine est un **nœud instable**.

Cas N=3 :

$$B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $a < 0$ la solution est donnée par :

$$x(t) = \exp(at) \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

l'origine est un **foyer stable**.

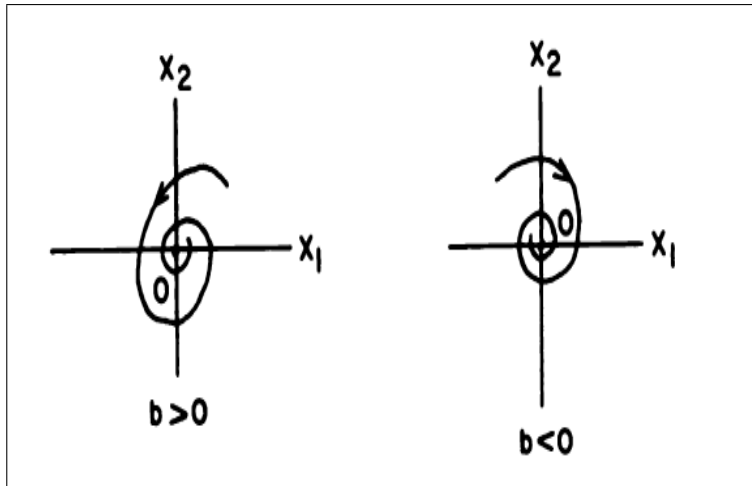


Figure 1.2.3 : Foyer stable

- Si $a > 0$ la trajectoire s'éloignent de l'origine en spirale lorsque $t \rightarrow \infty$ dans ce cas l'origine est un foyer instable (les flèches seront inversé de la figure (1.2.3)).

Cas $N \doteq 4$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

dans ce cas l'origine est un centre et les trajectoires de (1.2.2) satisfaisant $|x(t)| = cts$.

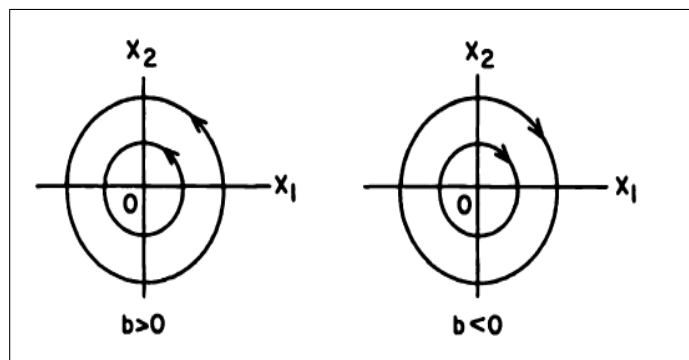


Figure 1.2.4 : Centre stable

Les trajectoires de (1.2.1) sont des ellipses qui satisfaisant $m \leq |x(t)| \leq M$.

1.2.1 Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr,det)

La typologie des solutions des systèmes linéaires planaires que nous avons établie à partir de la nature des valeurs propres de la matrice du système peut également se résumer dans un plan (tr, det) .

Théorème 1.2.1 Soit $\delta = \det A$ et $T = \text{trace}A$ et considérons le système (1.2.1) on a :

- a) Si $\delta < 0$ alors (1.2.1) possède un point selle (col).
- b) Si $\delta > 0$ et $T^2 - 4\delta \geq 0$ alors (1.2.1) possède un nœud à l'origine qui est stable si $T < 0$ et instable si $T > 0$.
- c) Si $\delta > 0$ et $T^2 - 4\delta > 0$ et $T \neq 0$ alors (1.2.1) possède un foyer à l'origine qui est stable si $T < 0$ et instable si $T > 0$.
- d) Si $\delta > 0$ et $T = 0$ alors (1.2.1) possède un centre à l'origine.

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

avec

$$\begin{cases} \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant

$$\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A).$$

Dans le plan (tr, det) , l'équation $\Delta = 0$ est celle d'une parabole passant par l'origine:

$$\det(A) = \frac{1}{4}(\text{tr}(A))^2$$

Cette parabole divise le plan en deux grandes régions :

Au-dessus la parabole ($\Delta < 0$), on trouve les portraits de phase des foyers et des centres; en-dessous ($\Delta > 0$), on trouve les nœuds et les points selles.

● **Cas $\Delta = 0$**

On a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, c'est-à-dire

$$\det(A) = \lambda_0^2 > 0 \text{ et } \operatorname{tr}(A) = 2\lambda_0$$

Par conséquent, si la trace est positive ($\lambda_0 > 0$), on a une étoile ou un nœud dégénéré instable, si la trace est négative ($\lambda_0 < 0$), on a une étoile ou un nœud dégénéré stable.

● **Cas $\Delta > 0$**

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes. On est dans la région sous la parabole qui peut encore est partagée en trois zones :

* $\det(A) < 0$: λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, l'origine est un **point selle**.

* $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 0$: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, l'origine est un **nœud instable**.

* $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) < 0$: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, l'origine est un **nœud stable**.

● **Cas $\Delta < 0$**

On a alors deux valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, c'est-à-dire:

$$\det(A) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \text{ et } \operatorname{tr}(A) = 2\alpha$$

On est dans la région au-dessus la parabole, qui se partage là encore en trois zones distinctes :

* $\operatorname{tr}(A) < 0$: La partie réelle des valeurs propres est négative, l'origine est un **foyer stable**.

* $\operatorname{tr}(A) > 0$: La partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est un **foyer instable**.

* $\operatorname{tr}(A) = 0$: La partie réelle des valeurs propres est nulle, l'origine est un **centre**.

Définition 1.2.1 - Un nœud ou un foyer stable de (1.2.1) est appelé un **puit**.

- Un nœud ou un foyer instable de (1.2.1) est appelé un **source**.

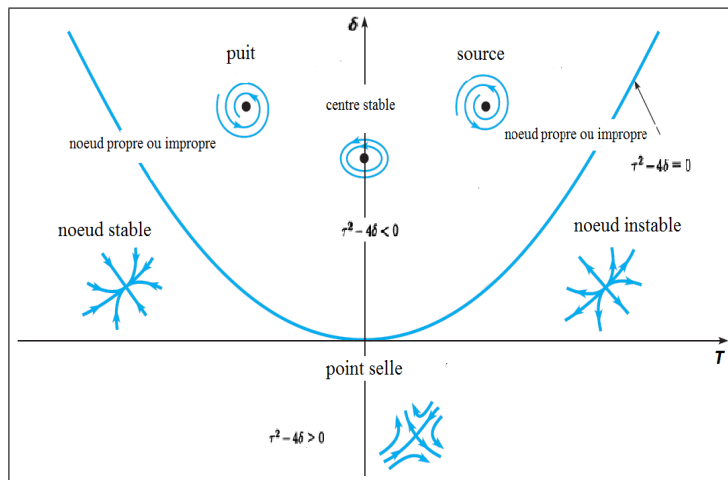


Figure 1.2.5 : Diagramme de stabilité

Remarque 1.2.1 Nous n'avons pas traité le cas où la matrice A du système (1.2.1) n'est pas inversible, i.e., $\det(A) = 0$. Dans ce cas particulier, il faut regarder directement le portrait de phase pour reconnaître la nature de l'origine.

1.3 Système non linéaire

1.3.1 Linéarisation d'un système non linéaire

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Donc soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathbb{C}^1 , c'est-à-dire $F = (f_1, \dots, f_n)$ ou $f_1 \dots f_n$ sont des applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} tel que les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ tel que $i, j = (1 \dots n)$ existent en tout point (x_1, \dots, x_n) et dépendent continument de (x_1, \dots, x_n) .

On appelle matrice jacobienne de F en un point $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ la matrice formée des dérivées partielles de $f_1 \dots f_n$ calculés en X_0 :

$$DF(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0^1, \dots, x_0^n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0^1, \dots, x_0^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0^1, \dots, x_0^n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0^1, \dots, x_0^n) \end{bmatrix}$$

1.3.2 La stabilité d'un système non linéaire

Pour étudier la stabilité d'un système (1.3.3) on a deux méthodes :

- Méthode indirecte basé sur la linéarisation de la fonction **F**.
- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelé fonction de **Lya-punov**.

Méthode indirecte

Le point fixe de (1.3.3) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) par ($x = X - a$) le système devient

$$\dot{x} = f(x)$$

et le développement de **Taylor** autour de $x = 0$ donne:

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

La méthode indirecte pure étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre a consister pour étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

avec

$$A = Df(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \end{bmatrix}$$

la matrice **jacobienne** de f en 0.

Si A possède n valeur propre distinctes λ_i , $i = 1 \dots n$, alors la solution de (1.2.1) est $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$, v_i le vecteur propre associé au valeur λ_i d'ou le théorème suivant

Théorème 1.3.1 considérons le système d'équation différentielle (1.3.3), soit $\bar{X} = 0$ un point d'équilibre de F . Où F est continue et différentiable dans un voisinage $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine. La linéarisation du système (1.3.3) autour du point d'équilibre donne le système linéaire suivante:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec la matrice jacobienne $A = \frac{dF}{dX} |_{X=\bar{X}}$, alors si:

— La partie réelle des valeurs propres du système linéaire à partie réelle sont strictement négative $\text{Re}(\lambda) < 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable (λ valeurs propres de A).

— Si le linéarisé possède des valeurs propres à partie réelle strictement positive $\text{Re}(\lambda) > 0$ alors le point d'équilibre est instable.

Notion de stable

Définition 1.3.1 un point d'équilibre de (1.3.3) est dit point **hyperbolique** si au moins une valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ n'a pas la partie réelle nulle.

Définition 1.3.2 un point d'équilibre de (1.3.3) est appelé **puit** si tous les valeurs propres de la matrice $A = Df(0)$ sont à parties réelles négatives il est appelé **source** si toutes les valeurs propres sont à parties réelles positives.

- Si au moins une valeur propre est à partie réelle négative et au moins une valeur propre est à partie réelle positive le point d'équilibre a est appelé **point selle (col)**.

Méthode directe (Fonction de Lyapunov)

Pour certain cas (non hyperbolique) l'examen des valeurs propres ne suffit pas pour conclure la stabilité des points fixes. Donc on a besoin d'un autre outil due au mathématicienne russe “ **Lyapunov** ” est que près d'un point d'équilibre asymptotiquement stable, il existe une norme $\|\cdot\|$ dans \mathbb{R}^n tel que $\|x(t) - \bar{x}\|$ décroît lorsque $x(t) \rightarrow \bar{x}$. **Lyapunov** a montrer que l'on pouvait utiliser d'autre fonction qu'une norme. On considère le système autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3.4)$$

On a la définition suivante:

Définition 1.3.3 On appelle fonction de **Lyapunov** pour le point d'équilibre \bar{x} une fonction continue V de w voisinage de \bar{x} a valeurs dans \mathbb{R} , différentielle sur $w - \{\bar{x}\}$ tel que:

- a) $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$.
- b) $\frac{dV}{dt}(x(t)) \leq 0$ dans $w - \{\bar{x}\}$.
- c) Si de plus $\frac{dV}{dt}(x(t)) < 0$ dans $w - \{\bar{x}\}$ alors V est une fonction de **Lyapunov** stricte.

C'est le théorème suivant qui sert à utiliser les fonctions de Lyapunov.

Théorème 1.3.2 Si le point d'équilibre \bar{x} admet une fonction de Lyapunov, alors c'est un point d'équilibre stable. Si le point d'équilibre \bar{x} admet une fonction de Lyapunov stricte, alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Quelques remarques au sujet des fonctions de Lyapunov :

- On note souvent \dot{V} pour $\frac{d}{dt}V(x(t))$.
- On peut utiliser une fonction de Lyapunov sans résoudre le système.
- Il n'y a aucune méthode générale pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie total comme fonction de Lyapunov.

Exemple 1.3.1 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(y^2 - 1) \\ \dot{y} = -y(x^2 + 1) \end{cases}$$

qui présente un point d'équilibre à l'origine et considérons la même fonction de **Lyapunov** candidat :

$$V(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{2}$$

et

$$V(0,0) = 0 \text{ et } V(x,y) > 0 \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$

On a alors

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= -2x^2 - 2y^2\end{aligned}$$

alors $\dot{V} < 0$, nous pouvons conclure que le système est asymptotiquement stable dans tout l'espace d'état (x,y) .

1.4 Le critère de Routh-Hurwitz

Pour démontrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il faut donc a priori calculer les n valeurs propres λ_i de A et vérifier que $\forall i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$.

Une méthode algébrique a été développée par **Routh-Hurwitz**, basée sur le calcul des déterminants particuliers dits déterminants de **Routh**.

Supposons que le système

$$\dot{x} = \phi(x)$$

son linéarisé s'écrive

$$\dot{x} = Ax$$

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Les déterminants de **Routh-Hurwitz** sont définis de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
H_1 &= |a_1| \\
H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\
H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \\
H_j &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \cdots & a_j \end{vmatrix} \\
H_n &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Proposition 1.4.1 Dans le cas d'une matrice de dimension n , les termes h_{jk} des déterminants de **Routh-Hurwitz** ($j, k = 1, \dots, n$) sont définis de la manière suivante :

* $h_{jk} = a_{2j-k}$ pour $0 \leq 2j - k \leq n$.

* $h_{jk} = 1$ pour $2j = k \iff 2j - k = 0$.

* $h_{jk} = 0$ pour $2j < k \iff 2j - k < 0$ ou $2j > n + k \iff 2j - k > n$.

Proposition 1.4.2

Le point d'équilibre x^* est asymptotiquement stable $\iff \forall i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \iff \forall i \text{ les } H_i > 0$

Théorème 1.4.1 (critère de **Routh-Hurwitz**) Soit $P(\lambda)$ un polynôme tel que $a_0 > 0$. Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable (**u. a. s**), il faut que les déterminants principaux de la matrice de **Hurwitz** soient strictement positif.

Proposition 1.4.3 *Soit*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

pour que P soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut et il suffit que

$$H_1 = a_1 > 0, H_2 = a_1a_2 - a_3a_0 > 0 \text{ et } H_3 = a_3H_2 > 0 \text{ quand } a_0 > 0$$

Une condition nécessaire pour que tous les racines du polynôme caractéristique admettent une partie réelle négative est que tous les coefficients doivent être positifs c'est-à-dire :

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0.$$

1.4.1 Critère de Routh-Hurwitz dans \mathbb{R}^3

Considérons le système :

$$\dot{x} = Ax$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

avec les déterminants de **Routh-Hurwitz** sont :

$$\begin{aligned} H_1 &= |a_1| = a_1 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 \\ H_3 &= a_3H_2 \end{aligned}$$

Ainsi les conditions de stabilité du point d'équilibre sont :

$$H_1 > 0, H_2 > 0 \text{ et } H_3 > 0.$$

Donc le point est *asymptotiquement stable*.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques et chaos

Dans ce chapitre on a cinq sections, dans la première section on présente les notions de système dynamique (flot, trajectoire, points fixes, les attracteurs et bassin d'attraction, etc), la deuxième section se consacre pour la bifurcation locale et ces trois types (nœud-col, transcritique et fourche), dans la troisième section on donne des définitions et propriétés du chaos, dans la quatrième on présente l'exposant de **Lyapunov**, pour finir, on donne une méthode de résolution numérique des équations différentielles, la méthode **Range-kutta**.

2.1 Notions de système dynamique

2.1.1 Flot et points fixes

Considérons le système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.1.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(U)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $r \geq 1$

Définition 2.1.1 Soit $x(x_0, t)$, $x_0 \in U$, une solution de (2.1.1) avec condition initiale $x(0) = x_0$. On appelle flot de (2.1.1), ou du champ de vecteurs f , l'application $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\phi_t(x_0) = x(x_0, t)$$

$\phi_t(x_0)$ possède les propriétés suivantes :

1. $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r .
2. $\phi_0(x_0) = x_0$.
3. $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.

Un point $a \in U$ est un point *limite* – ω d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une séquence $t_n \rightarrow \infty$ tel que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n} = a$$

Un point $b \in U$ est le point *limite* – α d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une séquence $t_n \rightarrow \infty$ tel que:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi_{t_n} = b$$

L'ensemble des points *limites* – α (resp *limites* – ω) de $x(x_0, t)$ est désigné par $\alpha(x)$ (resp par $\omega(x)$). L'ensemble $\alpha(x) \cup \omega(x)$ est appelé l'ensemble limite de $x(x_0, t)$.

Un cycle *limite* – α (resp cycle *limite* – ω) est une orbite fermée Γ telle que $\Gamma \subset \alpha(x)$ (resp $\Gamma \subset \omega(x)$).

Un ensemble $W \subset \mathbb{R}^n$ est appelé variété invariante de (2.1.1) si $\phi_t(W) \subset W$.

Définition 2.1.2 On appelle *point fixe* (ou *point stationnaire* ou *point d'équilibre* ou *point critique*) de (2.1.1) le point \bar{x} de l'espace des phases obtenu en annulant le second membre de (2.1.1) :

$$f(\bar{x}) = 0$$

Par le changement de variable $\xi = x - \bar{x}$, on peut ramener le point \bar{x} à l'origine.

2.1.2 Trajectoire (Orbite)

Soit $x_0 \in U$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de (2.1.1), l'ensemble des points $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ est appelé trajectoire (ou orbite) dans l'espace d'état passant par le point x_0 à l'instant initial $t = 0$ on note : $\gamma_{x_0} = \{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$.

2.1.3 Attracteurs et bassin d'attraction

Attracteurs

Définition 2.1.3 Soit A un ensemble compact fermé de l'espace des phases. On suppose que A est un ensemble invariant (ie $\phi_t(A) = A$ pour tout t). On dit que A est stable si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) \subseteq \phi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.

Si de plus

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$$

et s'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur.

Lorsque A est un attracteur, l'ensemble

$$W = \bigcup_{t < 0} \phi_t(V)$$

est appelé le bassin d'attraction de A . C'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent asymptotiquement vers A .

L'attracteur le plus simple est un point fixe. Un deuxième type d'attracteur pour un champ de vecteur est le cycle limite – ω : c'est une trajectoire fermée qui attire toute les orbites proches.

2.1.4 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux type attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolutions des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes.

- **Le point fixe** : est l'attracteur le plus simple, dans le cas discret on dit que $a \in E$ est un point fixe de l'application $f : \Omega \rightarrow \Omega$ si $f(a) = a$.
- **Le cycle limite** : On appelle cycle limite sur un plan ou une variété bidimensionnelle, toute trajectoire fermée Γ dans l'espace des phases tel que : si $a \notin \Gamma$, alors Γ est un ensemble α - limite de a , ou un ensemble ω - limite de a .
- **Un tore** : Il est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant n fréquences de base indépendantes.

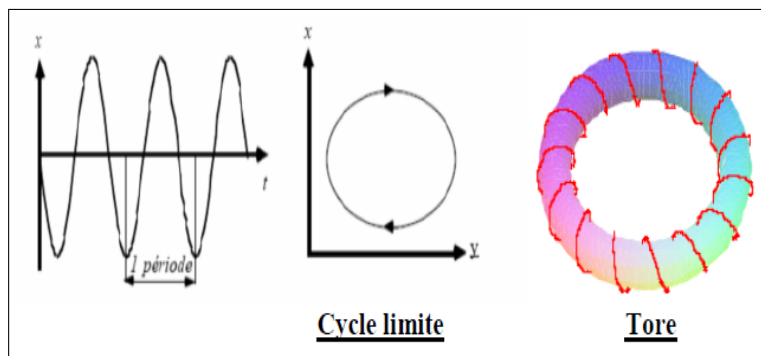


Figure 2.1.1 : Attracteurs réguliers

Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques.

Les caractéristiques d'un attracteur étranges sont:

- La dimension d de l'attracteur est fractale (non entier) avec $2 < d < n$, ou n est la dimension de l'espace des phases.
- Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écartier l'une de l'autre.
- Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.

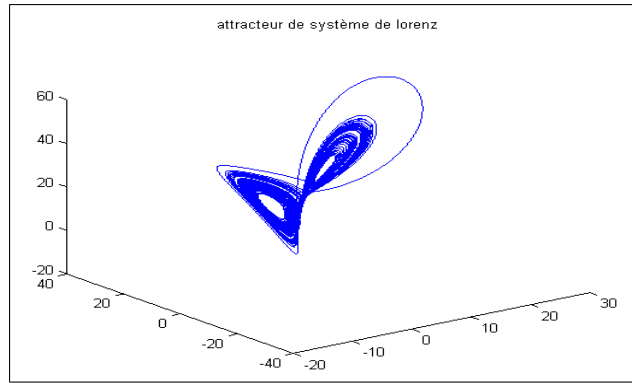


Figure 2.1.2 : Attracteur étrange de Lorenz

2.2 Bifurcations

Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement du type topologique de la trajectoire d'un système dynamique lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont elle dépend varient. C'est une notion très importante en mécanique où l'étude des systèmes d'équations non-linéaires en fonction des paramètres caractéristiques est classique. Le simple pendule entrepris présente des comportements différents suivant les valeurs des paramètres d'entretien et d'amortissement mathématiquement, il y a bifurcation lorsque les portraits des phases ne sont plus homeomorphes. Illustrons quelque peu cette notion. Considérons un système dynamique dépendant d'un paramètre réel r , à une dimension :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, r)$$

avec $x \in I \subset \mathbb{R}^n$, $r \in D \subset \mathbb{R}$, $f \in C^m$ tel que $m \neq r$.

2.2.1 Les bifurcations locales

Dans cette partie, nous ne nous intéressons qu'aux bifurcations dites **locales**, c'est-à-dire au comportement de trajectoire dans le voisinage d'un point fixe, là où les développements en série de Taylor sont applicables.

2.2.2 Les types des bifurcations

On considère trois types de bifurcations locales : la bifurcation nœud-col, transcritique et la bifurcation fourche. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation du système au voisinage d'un point dynamique.

Soit le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x, r) \quad x \in I \subset \mathbb{R}^n \quad (2.2.2)$$

avec x^* est un point fixe et $x(t)$ est une solution de système (2.2.2).

Donc la stabilité de (2.2.2) est :

$$\varepsilon(t) = x(t) - x^* \Rightarrow \dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) = f(x, r)$$

D'après le développement limite de **Taylor** au point x^* on a :

$$\begin{aligned} f(x, r) &= f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + o(x^2) \\ \text{donc } \dot{\varepsilon}(t) &= \dot{x}(t) = f(x, r) = \varepsilon f'(x^*) \end{aligned}$$

Donc • si $f'(x^*) > 0$ diverge (**instable**)

• si $f'(x^*) < 0$ converge (**stable**)

Dans la suite, chaque bifurcation sera présentée graphiquement. Les conventions des représentations graphiques seront les suivantes la figure (2.2.3) :

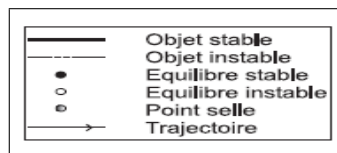


Figure 2.2.3 : Conventions graphiques

Bifurcation nœud-col

Soit la condition suivante :

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \dots (**)$$

On a une bifurcation **nœud-col** (saddle-node en anglais) si les conditions suivantes satisfaites :

$$\frac{\partial f}{\partial r}(0,0) \neq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

Donc on déduit que:

- Si $\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ on a 2 point fixe si $r > 0$ et 0 point fixe si $r < 0$.
- Si $\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ on a 2 point fixe si $r < 0$ et 0 point fixe si $r > 0$.

Les diagrammes des bifurcations au voisinage de $(x, r) = (0, 0)$ sont présentés sur la figure (2.2.4) :

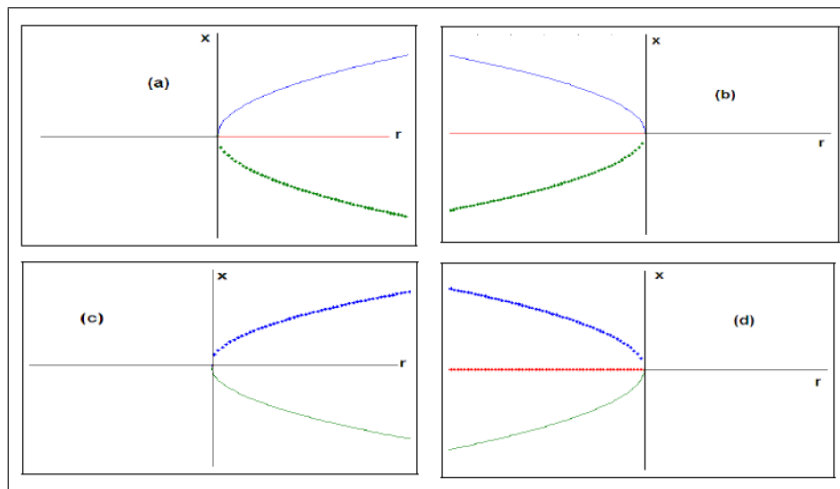


Figure 2.2.4 : Diagramme du bifurcation noeud-col

- a) $\frac{\partial f}{\partial r} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$
- b) $\frac{\partial f}{\partial r} < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$
- c) $\frac{\partial f}{\partial r} < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$
- d) $\frac{\partial f}{\partial r} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

Exemple 2.2.1 Soit le système suivant :

$$\dot{x} = r + x^2 = f(x, r)$$

Donc:

* Pour $r < 0$, il ya deux point fixe $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{-r}$ comme $f'(x) = 2x$.

On a $f'(\pm\sqrt{-r}) = \pm 2\sqrt{-r}$ le point fixe $-\sqrt{-r}$ est donc stable, et le point fixe $(+\sqrt{-r})$ est instable.

* Pour $r > 0$ il n'ya pas de point fixe.

* Pour $r = 0$, on a $f'(0) = 0$, est un point semi stable ou point selle.

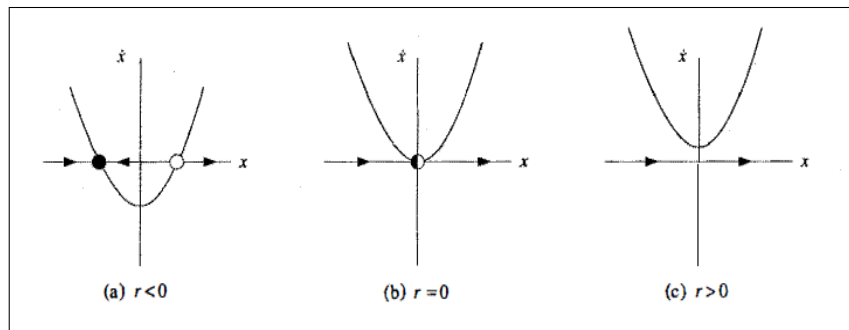


Figure 2.2.5 : Bifurcation nœud-col: $r + x^2$

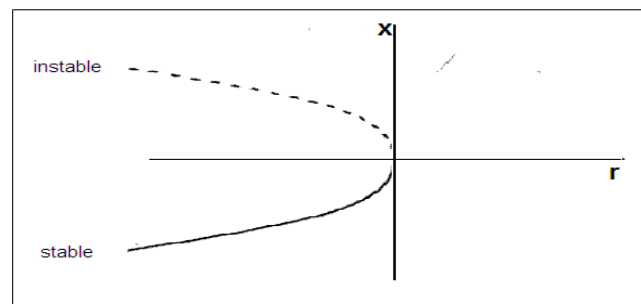


Figure 2.2.6 : Diagramme de bifurcation nœud-col

Echange de stabilité-bifurcation transcritique

On dit que le système possède une bifurcation **transcritique** si vérifie (**) et on satisfait les conditions suivant : $\frac{\partial f}{\partial r}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$, .

Exemple 2.2.2 Soit le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) = rx - x^2$$

Donc $f'(x) = r - 2x$.

Il ya deux point fixe : $x = 0$ ou $x = r$

* Pour $r < 0$, $f'(0) = r < 0$ et $f'(r) = -r > 0$ donc le point fixe $x = 0$ est stable tandis que le point fixe $x = r$ est instable.

* Pour $r > 0$, $f'(0) = r > 0$ et $f'(r) = -r < 0$ donc le point fixe $x = 0$ est instable tandis que le point fixe $x = r$ est stable.

Il y a donc échange de stabilité en $r = 0$ ou il n'y a qu'un point fixe $x = 0$.

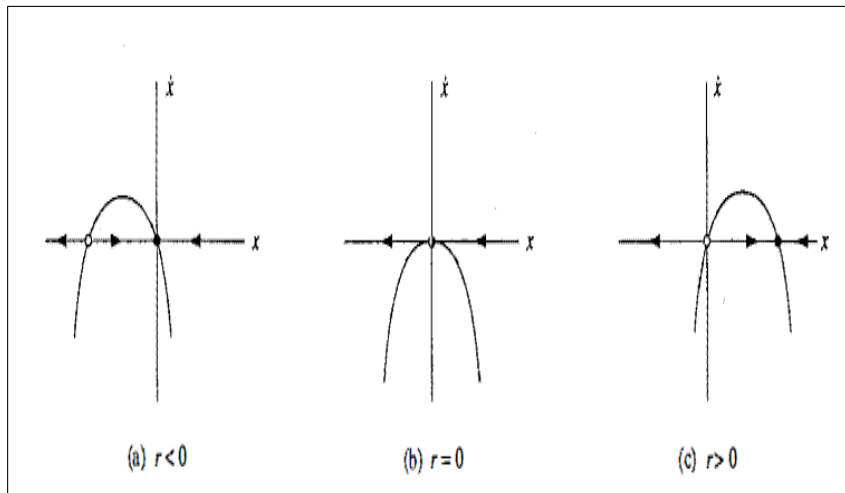


Figure 2.2.7 : Bifurcation transcritique $rx - x^2$

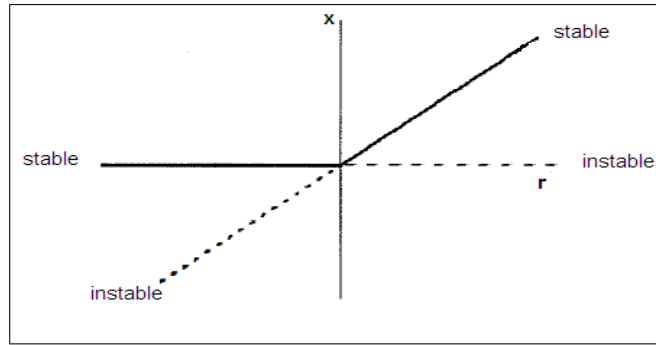


Figure 2.2.8 : Diagramme de bifurcation transcritique

Bifurcation fourche

Si vérifie la condition (***) et de plus

$$\frac{\partial f}{\partial r}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

Alors ce bifurcation est une bifurcation **fourche** ou (*pitchfork* en anglais); et les différentes courbes des points fixes et leur stabilité sont présentés sur la figure (2.2.9) :

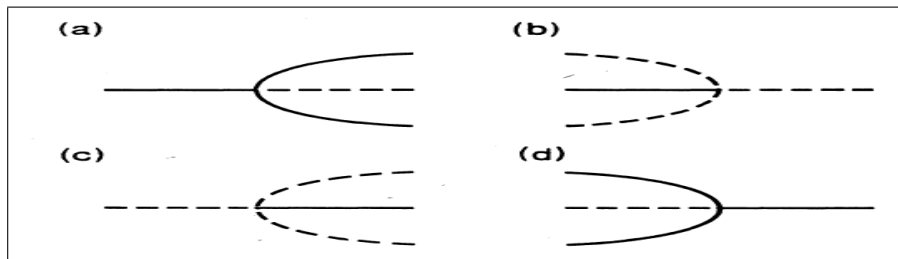


Figure 2.2.9 : Diagramme de la bifurcation.fourche (pitchfork)

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} > 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 0.$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} > 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} > 0.$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} < 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} > 0.$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} < 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 0.$

a) et d) est une bifurcation **sur-critiques** (fourche est *stable*).

b) et c) est une bifurcation **sous-critiques** (fourche est *instable*).

Exemple 2.2.3 Soit le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) = rx - x^3$$

Donc on a: $f'(x) = r - 3x^2$

Alors

* Pour $r < 0$ il ya un seul point fixe stable $x = 0$.

* Pour $r > 0$ il y a trois points fixes : $x = \pm\sqrt{r}$ et $x = 0$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) = r - 3x^2$ on

a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\pm\sqrt{r}, r) &= -2r < 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, r) &= r > 0 \end{aligned}$$

On déduit que les points fixes $x = \pm\sqrt{r}$ sont stable tandis que le point fixe $x = 0$ est instable.

* Pour $r = 0$ il y a un seul point fixe stable $x = 0$.

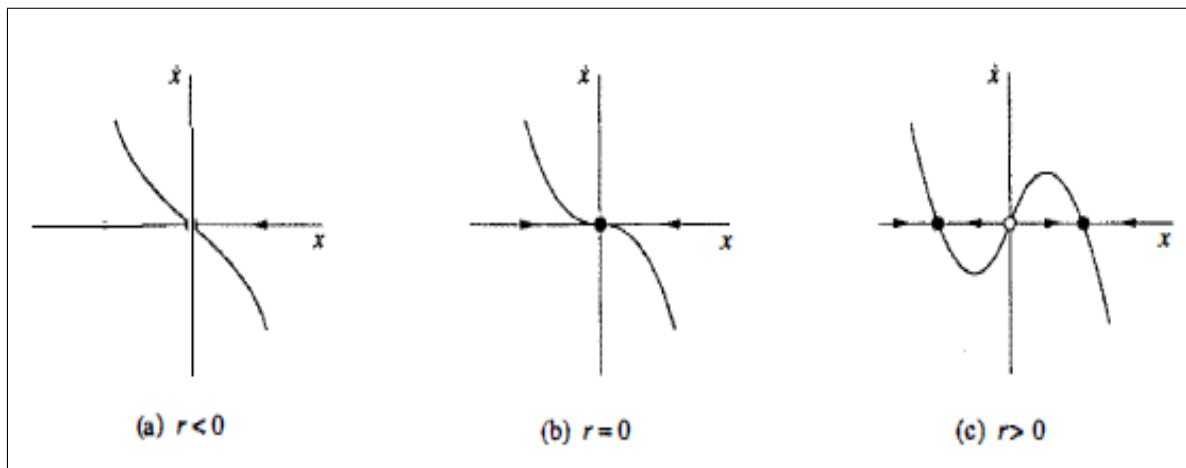


Figure 2.2.10 : Bifurcation fourche: $rx - x^3$

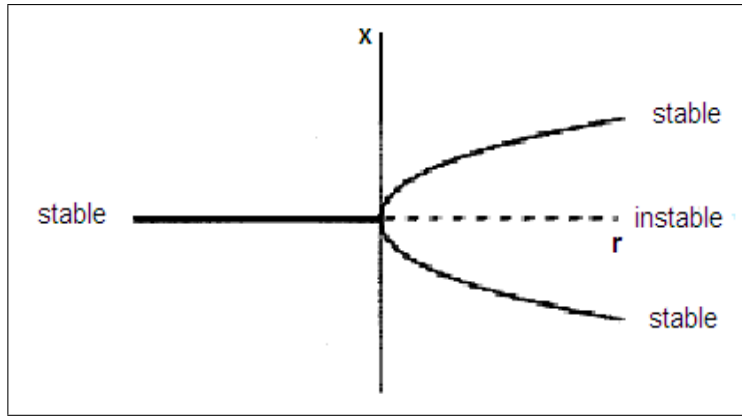


Figure 2.2.11 : Diagramme de bifurcation fourche

2.3 Chaos

Introduction:

La théorie du chaos traite des systèmes dynamiques déterministes, mais qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé "sensibilité aux conditions initiales" qui, modulant une propriété supplémentaire de récurrence, les rend non prédictibles en pratique à "long terme".

On appelle chaotique toute système dynamique qui a les deux caractéristiques suivantes :

- 1- Une grande sensibilité aux conditions initiales.
- 2- Il y a partout des orbites périodiques.

Les signaux chaotiques peuvent être obtenus à partir des circuits non linéaires où interviennent des paramètres.

Le chaos n'est pas aussi "chaotique" que sa dénomination le laisse entendre; son désordre n'est qu'apparent. Un système chaotique est imprévisible, mais il est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps: la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, l'instant initiale permet le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment.

2.3.1 Définition du chaos

Un petit jeu mathématique qui dit à peu près tout sur le chaos. Le chaos est comme les décimales de ces processus qui donne un comportement qui semble aléatoire, dans une certaine mesure, bien qu'il soit donné par un processus déterministe.

Plus précisément, le chaos appartient à cette vaste catégorie appelée système dynamique déterministe.

Voilà des mots bien compliqués. On appelle systèmes dynamiques tous les "jeux" qui consistent à déplacer un point, ou plusieurs points (ou une infinité des points).

1- En se donnant la position initiale de ces points.

2- En se donnant une loi d'évolution qui dit quelque chose du genre "si on est à tel endroit, on doit aller à tel autre endroit". C'est à quoi l'on s'intéresse alors sont les trajectoires de ces points.

2.3.2 Caractérisation du chaos

La caractérisation du comportement dynamique du système chaotique peut se faire par divers outils classiques, dont l'exposant de Lyapunov, l'espace des phases et le diagramme de bifurcation.

Par détermination des exposants de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système, sensible à de très petites variations de la condition initiale, aura un exposant positif lorsqu'il est chaotique. En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à de petites variations des conditions initiales; les trajectoires se rapprochent et l'information sur les conditions initiales est donc perdue.

Par le diagramme de bifurcations

Une manière rapide de représenter la transition vers le chaos est le diagramme de bifurcations. Les changements du comportement dynamique du système, ou bifurcations, peuvent être donc observés en fonction du paramètre dit de bifurcation.

2.3.3 Propriétés du chaos

Les propriétés du chaos ne dépendent pas du système où il apparaît: Les attracteurs étranges, fragiles structures entre l'ordre et le désordre, et les nombres de **Feigenbaum** sont toujours présents. On parle de structure universelle.

La sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)

Est une caractéristique fondamentale des systèmes dynamiques. Il faut entendre ici qu'un système réagira de façon totalement différente selon la condition initiale. Ceci a notamment comme conséquence le fait qu'un système chaotique, même si tout ses imprévisible car sensible à d'infimes perturbations initiales. Attracteurs étranges et chaos ont permis de mieux comprendre des phénomènes comme l'apparition de la turbulence en hydrodynamique, les perturbations orbitales dans le système solaire, et la météorologie, qui permet de bien illustrer la dépendance sensitive des conditions initiales, comme la fait **Edward Lorenz** dans sa célèbre remarque que « le battement des ailes d'un papillon aura pour effet après quelque temps de changer complètement l'état de l'atmosphère terrestre ».

La densité des points périodiques

Cette propriété est simple à comprendre; considérons l'application logistique définie par:

$$\begin{aligned} f & : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_0 \in [0, 1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{array} \right. \\ \text{avec } f & : x \mapsto 4x(1 - x) \end{aligned}$$

Dans tout sous-intervalle de $[0, 1]$, il existe au moins un point périodique, c'est-à-dire dont l'orbite est un ensemble fini.

On déduit que tout sous-intervalle de $[0, 1]$ en contient alors une infinité des points périodiques. Par contre, cette propriété n'est pas visuelle, à cause de la propriété de sensibilité aux conditions initiales.

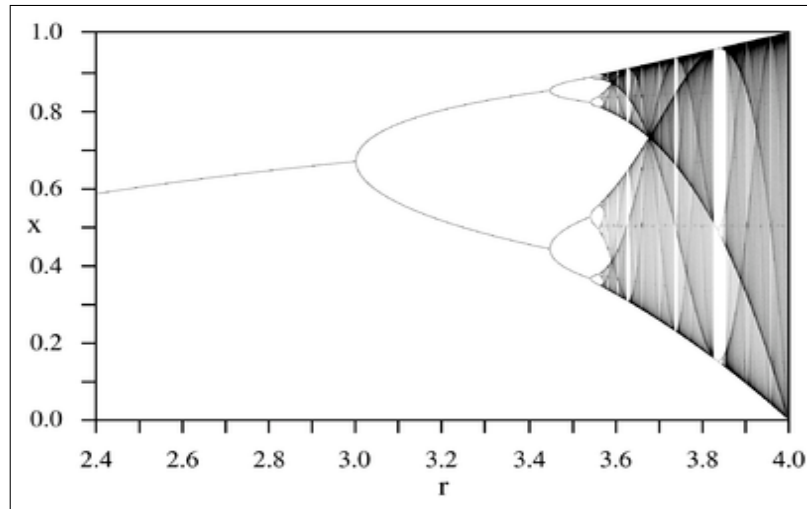


Figure 2.3.12 : Le diagramme du bifurcation de la fonction logistique

2.4 Exposants de Lyapunov

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Étant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence.

La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Les exposants de Lyapunov permettent de caractériser le chaos temporel et plus particulièrement la sensibilité aux conditions initiales que peut présenter un attracteur

étrange. Autrement dit, nous allons exposer comment calculer le taux de divergence entre l'évolution des trajectoires issues des conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange; on peut interpréter ceci en termes d'information au sens de **Shannon** : Sur un attracteur chaotique, on parle de création d'information en ce sens que deux états initiaux proches, indiscernables par un appareil de mesure de précision finie, vont évoluer au cours du temps vers deux états discernables.

2.4.1 Exposant de Lyapunov pour une application unidimensionnelle

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_t sur x_{t+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel λ tel qu'après t itérations:

$$|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)| \approx \varepsilon \exp(t\lambda)$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln\left(\frac{|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)|}{\varepsilon}\right) \approx t\lambda$$

Si l'on fait tendre ε vers 0, il vient :

$$\lambda \approx \frac{1}{t} \left| \frac{df(x_0)}{dx_0} \right|$$

Finalement, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \lim \left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}$$

λ est appelé exposant de **Lyapunov**. Il indique le taux moyen de divergence par itération.

2.4.2 Spectre de Lyapunov pour une application multidimensionnelle

Commençons par préciser qu'un système m dimensionnel possèdera m exposants de **Lyapunov**. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper volume initial V_0 évolue selon une loi de type:

$$V = V_0 \exp((\lambda_1 + \dots + \lambda_m)t)$$

Notons que si un système est dissipatif, alors la somme des exposants soit négative. Soit une hyper sphère dans un espace m dimensionnel de rayon ε des conditions initiales et examinons son évolution. Nous nous intéressons à $\|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\|$; posons $\dot{x}_0 = x_0 + \varepsilon$ et linéarisons f ou voisinage de \dot{x}_0 :

$$x_t - \dot{x}_t = Df^t(x_0)(x_0 - \dot{x}_0)$$

Où $Df^t(x_0)$ est la matrice jacobéenne de l'application f^t en x_0 . Si cette dernière est diagonalisable, il existe une matrice inversible P_t tel que:

$$D^t = p_t^{-1}(Df^t)p_t$$

Où D^t est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de Df^t etant donné que le jacobéenne $D^t f^t$ est semblable à D^t , et que, par conséquent, les applications linéaires, qu'elles définissent, sont linéairement conjuguées, on peut étudier l'évolution de la divergence selon cette matrice D^t .

Notons $\Lambda_i^t, i = 1, \dots, m$, les valeurs propres de la matrice jacobéenne $D^t f$. On définit

alors les m exposants de **Lyapunov** de la manière suivante:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln [\Lambda_i^t], i = 1, \dots, m$$

2.4.3 Exposant de Lyapunov pour un système continu

L'un des algorithmes utilisé pour le calcul est celui appelé algorithme de **Wolf**. Celui-ci permet de calculer les exposants de **Lyapunov** à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps. L'algorithme fait en plus varier un paramètre de contrôle choisi pour permettre de visionner l'évolution de la sensibilité aux conditions initiales selon ce dernier. Il faut remarquer que l'algorithme de **Wolf** calcule l'exposant de **Lyapunov** le plus grand. Pour ce faire, il fait la moyenne des sommes des divergences normalisées, et puisque l'exposant le plus grand aura la plus grande influence sur le système.

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes:

1. Changement du paramètre de contrôle.
2. Choix aléatoire d'une condition initiale.
3. Evolution du système dans le but d'atteindre un attracteur.
4. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation.
5. Evolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.
6. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédant le calcul d'une moyenne de la divergence.
7. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné.
8. Retour au point (1).
9. Dessin de l'exposant de **Lyapunov** le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

2.4.4 Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de **Lyapunov** positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Pour une application bidimensionnelle, on peut dès lors résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de **Lyapunov** (ici ils sont deux) dans le tableau suivant:

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	(-, -, -)
Cycle limite périodique	(0, -, -)
Cycle limite quasi-périodique	(0, 0, -)
Attracteur étrange	(+, 0, -)

Table.1 Signe des exposants de **Lyapunov** des différents types d'attracteur dans un espace tridimensionnel.

Dimension de Kaplan-Yorke

Soit j_0 un entier positif tel que:

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0$$

On définit alors la dimension de **Kaplan-Yorke** par la relation suivant :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

Dimension de Lyapunov

Définition 2.4.1 Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$, les exposants de **Lyapunov** d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0$$

Alors la dimension de **Lyapunov** défini par **Kaplan-Yorke** est donné par:

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

2.5 La méthode de résolution numérique (Runge-Kutta)

Dans les méthodes de résolution des problèmes à valeurs initiales, le processus de calcul est un processus fini. On avance de N pas, à partir du temp initial jusqu'au temp final et on s'arrête. Chaque valeur est donc calculée une fois pour toutes. Sauf technique plus complexe d'adaptation de maillages, il n'y a pas de r itération pour améliorer le résultat. Il faudra donc utiliser des méthodes suffisamment précises. Ceci explique le recours à des méthodes d'ordre élevé. Les méthodes de **Runge-Kutta** sont les généralisations de la méthode d'**Euler** à des ordres supérieurs à un. Elles s'obtiennent à partir des formules d'intégration numériques plus précises que la formule des rectangles.

Considérons tout d'abord l'utilisation de la formule des **trapèzes**. Elle conduit à la méthode:

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = x_n + (h/2)(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})) \end{cases}$$

Cette méthode est une méthode implicite. Le calcul de la nouvelle valeur x_{n+1} nécessite la résolution d'une équation. Si l'on veut obtenir une méthode explicite du même ordre, on peut procéder de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1}^* = x_n + hf(t_n, x_n) \\ x_{n+1} = x_n + (h/2)(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^*)) \end{cases}$$

Ceci peut s'interpréter comme une itération de point fixe. On obtient ainsi la méthode de **Runge-Kutta** d'ordre 2 : **RK2**.

De même l'utilisation de la formule d'intégration de **Simpson** est à la base de la formule

de **Runge-Kutta** d'ordre 4 : **RK4**.

C'est l'une des formules les plus utilisées, elle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ donné puis pour } n \geq 0 \\ k_1 = hf(t_n x_n) \\ k_2 = hf(t_n + h/2, x_n + k_1/2) \\ k_3 = hf(t_n + h/2, x_n + k_2/2) \\ k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_3) \\ x_{n+1} = x_n + 1/6[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{array} \right.$$

Chapitre 3

Application sur le système de Lorenz

Pour prouver l'étude précédente, on fait l'analyse du système de **Lorenz**.

3.1 Le modèle de Lorenz

En 1963, **Edward Norton Lorenz** a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censé représenter grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère (obtenu à partir des équations de **Navier-Stokes**).

3.2 Les équations du modèle

Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (3.2.1)$$

L'espace des phases est tridimensionnel. Les valeurs de σ et b sont fixés, respectivement à 10 et $\frac{8}{3}$. Le paramètre de contrôle est r qui positif. Physiquement, r est proportionnel au gradient thermique vertical imposé au fluide.

3.2.1 L'équilibre du modèle

On cherche les points d'équilibre (x, y, z) vérifiant $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$.

Pour $r < 1$, il n'y a qu'un seul point d'équilibre, l'origine $(0, 0, 0)$. Et, pour $r > 1$, il y a deux autres points :

$$E^\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

L'étude de la stabilité des points d'équilibres repose sur le critère de **Routh-Hurwitz** sur le polynôme caractéristique de λ de la matrice jacobienne A obtenu en linéarisation le système (3.2.1) autour d'un point d'équilibre.

L'expression de la matrice jacobienne A du système est :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

La stabilité au point $(0, 0, 0)$

La matrice jacobienne au point $(0, 0, 0)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

et le $(\det(A - \lambda I))$ est donnée par :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix}$$

Donc le polynôme caractéristique est à la forme suivante :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) \\ &= \lambda^3 + (1 + \sigma + b)\lambda^2 + (b(\sigma + 1) + \sigma(1 - r))\lambda + b\sigma(1 - r) = 0 \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}a_1 &= (1 + \sigma + b) \\a_2 &= b(\sigma + 1) + \sigma(1 - r) \\a_3 &= b\sigma(1 - r)\end{aligned}$$

tel que $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$.

Donc les déterminants de **Routh-Hurwitz** sont données par :

$$\begin{aligned}H_1 &= |a_1| = a_1 = \frac{41}{3} \\H_2 &= a_1 a_2 - a_3 = \frac{41}{3} \left(\frac{8}{3}(10 + 1) + 10(1 - r) \right) - \left(\frac{8}{3} \right) (10)(1 - r) \\&= \frac{4598}{9} - 110r \\H_3 &= a_3 H_2 = \left(\frac{8}{3} \right) (10)(1 - r) H_2 = \frac{80}{3} (1 - r) H_2\end{aligned}$$

Le système de **Lorenz** est *asymptotiquement stable* au point $(0, 0, 0)$ si les

$$H_i > 0, i = 1, \dots, 3.$$

ie :

$$H_1 = a_1 = (1 + \sigma + b) = \frac{41}{3} > 0$$

car les paramètres σ , b , r sont positif et H_1 indépendant a r .

$$\begin{aligned}H_2 &= a_1 a_2 - a_3 > 0 \implies \frac{4598}{9} - 110r > 0 \\&\implies -110r > -\frac{4598}{9} \implies r < \frac{4598}{990} = 4.64\end{aligned}$$

donc pour $r < 4.64$ on a $H_2 > 0$.

$$\begin{aligned}
H_3 &= a_3 H_2 > 0 \\
&\implies \frac{80}{3}(1-r)H_2 > 0 \iff H_2 > 0 \text{ et } (1-r) > 0 \\
&\implies r < 4.64 \text{ et } r < 1
\end{aligned}$$

alors pour $r < 1$; $H_3 > 0$.

Donc pour $r < 1$ les $H_i > 0, i = 1, \dots, 3$ alors le système de **Lorenz** est *asymptotiquement stable*.

* Si $r = 1$

On a $H_1 > 0$ (d'après le 1^{er} cas).

Et on a $H_3 = a_3 H_2 = 0$ (car $a_3 = b\sigma(1-r) = 0$) alors le système de **Lorenz** est un *point critique*.

La stabilité au point $E^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$

La matrice jacobienne au point $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

et le $(\det(A - \lambda I))$ est donnée par :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{vmatrix}$$

Donc le polynôme caractéristique est à la forme suivante :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + 1 + b)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0$$

avec

$$\begin{aligned}c_1 &= a_1 = (1 + \sigma + b) \\c_2 &= b(\sigma + r) \\c_3 &= 2b\sigma(-1 + r)\end{aligned}$$

pour le critère **Routh-Hurwitz** de le système de **Lorenz** est *asymptotiquement stable* au point E^+ si les $H_i > 0, i = 1, \dots, 3$.

ie :

$$H_1 = c_1 = (1 + \sigma + b) = \frac{41}{3} > 0$$

car les paramètres σ, b, r sont positif et H_1 indépendant a r .

$$\begin{aligned}H_2 &= c_1.c_2 - c_3 > 0 \\&\implies (1 + \sigma + b)(b(\sigma + r)) - 2b\sigma(r - 1) > 0 \\&\implies r < \frac{\sigma(b + \sigma + 3)}{(\sigma - 1 - b)} = 24.74\end{aligned}$$

tel que $\sigma = 10, b = 8/3$. Donc pour $r < 24.74$ on a $H_2 > 0$.

$$\begin{aligned}H_3 &= c_3H_2 > 0 \implies 2b\sigma(r - 1) > 0 \text{ et } H_2 > 0 \\&\iff r > 1 \text{ et } r < 24.74.\end{aligned}$$

Donc pour $r \in]1, 24.74[$ le système de **Lorenz** est *asymptotiquement stable*.

On explique les résultats précédents par le tableau suivant :

La valeur pour r	Le point $O(0, 0, 0)$	Le point E
$r < 1$	asymptotiquement stable	n'est pas existe
$r = 1$	point critique	n'est pas existe
$r > 1$ où $r \in]1, 24.74[$	instable	asymptotiquement stable
$r = 24.74$	instable	point critique
$r > 24.74$	instable	instable

On peut généraliser simplement l'application du méthode de **Runge-Kutta** sur le système (3.2.1). Pour un système de **Lorenz** à trois équations couplées de la forme:

$$\begin{cases} x_0, y_0, z_0 \text{ donnés} \\ \dot{x}(t) = \sigma(y - x) = f_1(t, x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) = rx - y - xz = f_2(t, x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) = xy - bz = f_3(t, x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

On obtient l'algorithme suivante pour **Runge-Kutta** d'ordre 4 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_0, y_0, z_0 \text{ donnés puis pour } n \geq 0 \\
k_1 = hf(t_n x_n, y_n, z_n) \\
l_1 = hf(t_n x_n, y_n, z_n) \\
p_1 = hf(t_n x_n, y_n, z_n) \\
\\
k_2 = hf_1(t_n + h/2, x_n + k_1/2, y_n + l_1/2, z_n + p_1/2) \\
l_2 = hf_2(t_n + h/2, x_n + k_1/2, y_n + l_1/2, z_n + p_1/2) \\
p_2 = hf_3(t_n + h/2, x_n + k_1/2, y_n + l_1/2, z_n + p_1/2) \\
\\
k_3 = hf_1(t_n + h/2, x_n + k_2/2, y_n + l_2/2, z_n + p_2/2) \\
l_3 = hf_2(t_n + h/2, x_n + k_2/2, y_n + l_2/2, z_n + p_2/2) \\
p_3 = hf_3(t_n + h/2, x_n + k_2/2, y_n + l_2/2, z_n + p_2/2) \\
\\
k_4 = hf_1(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + p_3) \\
l_4 = hf_2(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + p_3) \\
p_4 = hf_3(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3, z_n + p_3) \\
\\
x_{n+1} = x_n + 1/6[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\
y_{n+1} = z_n + 1/6[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4] \\
z_{n+1} = z_n + 1/6[p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4]
\end{array} \right.$$

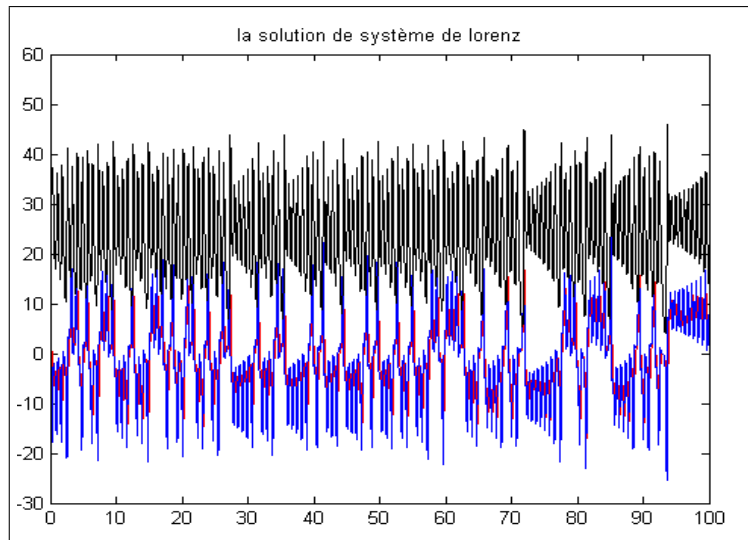


Figure 3.2.1 : La solution de système de Lorenz

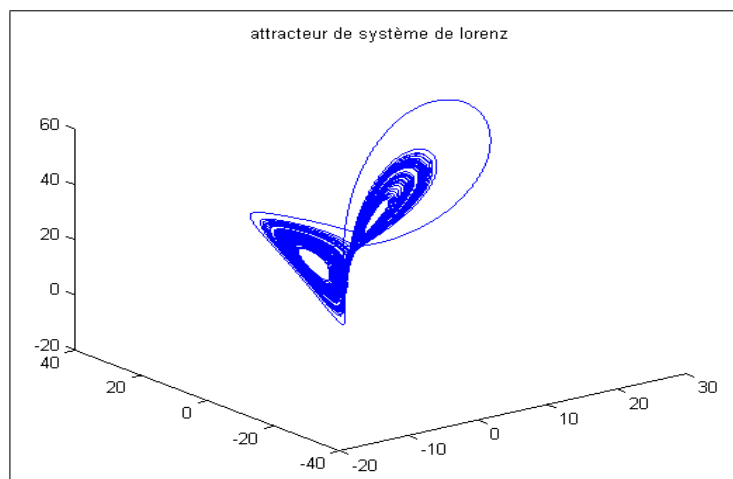


Figure 3.2.2 : Attracteur de système de Lorenz

3.2.2 Les exposantes de Lyapunov

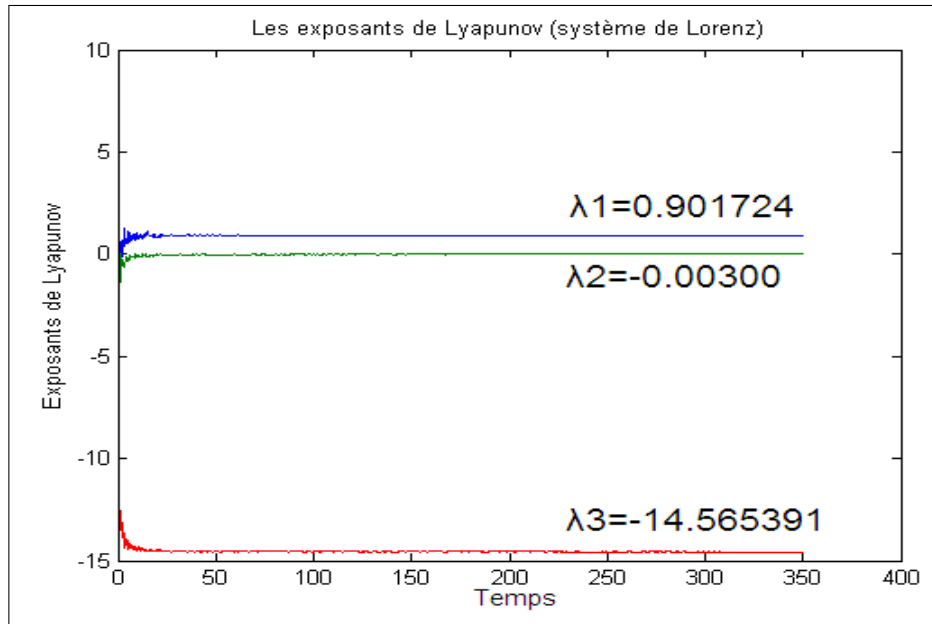


Figure 3.2.3 : Les exposants de **Lyapunov** du système de **Lorenz** pour ($\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$).

Donc pour ($\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$) les exposants de **Lyapunov** du système de **Lorenz** et:

$$\lambda_1 = 0.91, \quad \lambda_2 = 0.00, \quad \lambda_3 = -14.56,$$

On remarque que le premier exposant est positif, ce qui veut dire que pour ces paramètres le système de **Lorenz** est en plein chaos, avec le type d'attracteur et **étrange** (car les signes est $(+, 0, -)$).

La dimension de Lyapunov

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

$$D_L = 2 + \frac{0.91724 + 0.00300}{|-14.565391|}$$

$$D_L = 2.063$$

Donc voici le programme en langage *Matlab* utilisant le schéma **RK4**.

```
clear all;
close all;
clc;
T=100;
r=28;
b=8/3;
s=10;
x(1)=10;
y(1)=20;
z(1)=-5;
N=999999;
h=T/N;
t=0:h:T;
for i=1:N
    k1=h*(s*(y(i)-x(i)));
    l1=h*(r*x(i)-y(i)-(x(i)*z(i)));
    p1=h*(x(i)*y(i)-(b*z(i)));

    k2=h*(s*((y(i)+l1/2)-(x(i)+k1/2)));
    l2=h*((r*(x(i)+k1/2)-(y(i)+l1/2)-(x(i)+k1/2)*(z(i)+p1/2)));
    p2=h*((x(i)+k1/2)*(y(i)+l1/2)-(b*(z(i)+p1/2)));

    k3=h*(s*((y(i)+l2/2)-(x(i)+k2/2)));
    l3=h*((r*(x(i)+k2/2)-(y(i)+l2/2)-(x(i)+k2/2)*(z(i)+p2/2)));
    p3=h*((x(i)+k2/2)*(y(i)+l2/2)-(b*(z(i)+p2/2)));

    k4=h*(s*((y(i)+l3)-(x(i)+k3)));
    l4=h*((r*(x(i)+k3)-(y(i)+l3)-(x(i)+k3)*(z(i)+p3)));
```



```

p4=h*((x(i)+k3)*(y(i)+l3)-(b*(z(i)+p3)));

x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
%figure(*)
%plot3(x(i+1),y(i+1),z(i+1)); hold on
end
figure(1)
plot(t,x,'r',t,y,'b',t,z,'k')
title(' la solution de système de Lorenz ')
figure(2)
plot3(x,y,z)
title(' attracteur de système de Lorenz ')

```

Bibliographie

- [1] **M. S. ABD ELOUAHAB** , Les systèmes chaotiques à dérivées Fractionnaires, constantine, (Mémoire de Magistère) (2009).
- [2] **Claude Gomez**, Systèmes dynamiques (2007).
- [3] **E. N. Lorenz** "Deterministic Nonperiodic Flow" Journal of the Atmospheric sciences, March 1963.
- [4] **H. DANG-VU, C. DELCARTE** *Bifurcations et Chaos*, Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica, ellipses, Paris, (2000).
- [5] **I. Talbi** , systèmes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos, Constantine, (Mémoire de Magistère) (2010).
- [6] **L. Perko**, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Springer-verlag New York Berlin Heidelberg, (2000).
- [7] **S. H. STROGATZ** , *NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS*, With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering Printed in the United States of America. Published simultaneously in Canada, (1994).
- [8] **E. ZERAOULIA** , Etude De Quelques Types De Systemes Chaotiques Generalisation D'un Modele Issu Du Modele De Chen, Constantine (THESE presentee pour l'obtention du doctorat), (2006).
- [9] **W. E. Boyce, R. C. DiPrima**, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Ninth Edition, Printed in the United States of America, (2000).

الملخص:

في هذه المذكرة درسنا استقرار نظام لورينز، باستخدام طريقة روث-رويتز كما استخدمنا مركبات ليابونوف للكشف عن وجود الفوضى.

كلمات مفتاحية: الاستقرار، التشعبات، الجملة الديناميكية والجملة الديناميكية الفوضوية.

Résumé :

*Dans ce mémoire, nous avons étudié la stabilité du système de **Lorenz**, en utilisant la méthode de **Routh-Hurwitz** et nous utilisons l'exposant de **Lyapunov** pour détecter l'existence de chaos.*

Mots clés : *la stabilité, bifurcations, système dynamique et système dynamique chaotique.*

Abstract :

*In this memoir we have studied the stability of Lorenz system, by using the **Routh-Hurwitz** method and we use the **Lyapunov** exponent to detect the existence of chaos.*

Key words : *Stability, bifurcations, dynamic system, and dynamic system chaotic.*