

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire  
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

## Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques  
Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

# Thème Sur la synchronisation de deux systèmes chaotiques

Préparé par: Laib Hayet  
Boumelit Amina

Devant le jury

N.Hamri (professeur)

C.U.Abd Elhafid Boussouf

Président

M.S.Abdelouaheb (M.C.A)

C.U.Abd Elhafid Boussouf

Rapporteur

S.Kaouache (M.A.A)

C.U.Abd Elhafid Boussouf

Examineur

Année Universitaire : 2016/2017

# Remerciements

Au terme de ce travail, nous commençons par remercier notre DIEU pour nous avoir donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travail.

Nous tenons en premier lieu à exprimer notre profonde gratitude et notre sentiments les plus sincères à notre encadreur de ce travail le Docteur Abd Elwahab Mohamed-Salah, sous la direction duquel nous avons en le plaisir de travailler ses conseils, ses critiques, sa rigueur scientifique, ainsi que ses discussions, et qui a accepté de diriger notre travail.

Nous exprimons également notre gratitude à tous les enseignants et les professeurs de département de Mathématiques et Informatique du centre universitaire de Mila à notre formation depuis notre premier cycle d'étude jusqu'à la fin de notre cycle universitaire, et on remercie nos familles et nos amis pour leurs grand soutien.

Nos remerciement les plus vifs s'adressent aussi aux monsieurs le président et les membres de jury d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail, et aussi notre remerciements vont également à toutes les personnes, qui ont participé d'une façon ou d'une autre à l'achèvement de ce travail

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Définitions et notations . . . . .	7
1.2.1 Représentations mathématiques . . . . .	8
1.2.2 Systèmes continus et systèmes discrets . . . . .	8
1.2.3 Systèmes autonomes ou non-autonomes . . . . .	8
1.2.4 Espaces des phases . . . . .	8
1.2.5 Portrait de phases . . . . .	9
1.2.6 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs . . . . .	9
1.3 Section de Poincaré . . . . .	9
1.4 Poinçons d'équilibre . . . . .	10
1.5 Point limite . . . . .	10
1.6 Attracteurs et bassins d'attraction . . . . .	11
1.6.1 Ensemble invariant . . . . .	11
1.6.2 Attracteurs . . . . .	11
1.6.3 Différents types d'attracteurs . . . . .	12
1.6.4 Étude qualitative des systèmes dynamiques . . . . .	13
1.7 Bifurcation . . . . .	18
1.7.1 Bifurcation noeud-col . . . . .	18
1.7.2 Bifurcation transcritique . . . . .	20
1.7.3 Bifurcation fourche (pitchfork) . . . . .	21
1.7.4 Bifurcation verticale . . . . .	24
1.7.5 Bifurcation de Hopf . . . . .	25
<b>2 Théorie du chaos</b>	<b>29</b>
2.1 Introduction . . . . .	29
2.2 Définition du chaos . . . . .	29
2.3 Propriétés du chaos . . . . .	31
2.4 Attracteurs chaotiques . . . . .	32
2.5 Détection du chaos . . . . .	33
2.5.1 Les exposants de Lyapunov . . . . .	33
2.6 Dimension fractale . . . . .	34
2.7 Routes vers le chaos . . . . .	34
2.7.1 L'intermittence vers le chaos . . . . .	34

2.7.2	Le dédoublement de période . . . . .	34
2.7.3	La quasi-périodicité . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Synchronisation des systèmes chaotiques</b>	<b>36</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	Les systèmes couplés . . . . .	36
3.2.1	Accouplement unidirectionnel . . . . .	37
3.2.2	Méthode d'accouplement par contrôle continu . . . . .	38
3.2.3	Méthode d'accouplement par remplacement des variables . . . . .	38
3.3	La synchronisation . . . . .	38
3.3.1	Définitions mathématiques de la synchronisation . . . . .	38
3.3.2	Différents types de synchronisation . . . . .	39
3.3.3	Synchronisation identique . . . . .	39
3.3.4	La synchronisation généralisée . . . . .	42
3.3.5	La synchronisation de phase . . . . .	44
3.3.6	Synchronisation de retard . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Synchronisation de deux systèmes chaotiques différents par la méthode du système auxiliaire approché</b>	<b>46</b>
4.1	Introduction . . . . .	46
4.1.1	Description du système . . . . .	46
4.2	Synchronisation entre le l'oscillateur de Chua et l'oscillateur de Van der Pol-Duffing . . . . .	49
4.2.1	Analyse théorique . . . . .	49
4.2.2	Simulation numérique . . . . .	50
4.3	Deuxième application :Synchronisation entre le système de Finance et celui de Lorenz . . . . .	51
4.3.1	Analyse théorique . . . . .	51
4.3.2	Simulation numérique . . . . .	52
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

# Table des figures

1.1	Attracteurs réguliers . . . . .	12
1.2	Quelques exemples d'attracteurs étranges . . . . .	13
1.3	Les types de stabilité . . . . .	16
1.4	Conventions graphiques . . . . .	18
1.5	Diagramme de la bifurcation noeud-col . . . . .	20
1.6	Diagramme de bifurcation transcritique . . . . .	20
1.7	Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu < 0$ . . . . .	21
1.8	Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu = 0$ . . . . .	22
1.9	Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu > 0$ . . . . .	22
1.10	Diagramme de bifurcation fourche super-critique . . . . .	23
1.11	Diagramme de bifurcation fourche sous-critique . . . . .	23
1.12	Diagramme de la bifurcation verticale. . . . .	25
1.13	Diagramme de la bifurcation de Hopf super-critique. . . . .	27
1.14	Diagramme de la bifurcation de Hopf sous-critique. . . . .	28
2.1	Attracteur de Plykin . . . . .	32
4.1	Diagramme de bifurcation du système de Van der-Pol avec les portées du phase en $m = 20$ , $m = 90$ , et $m = 102$ . . . . .	47
4.2	exposant de Lyapounov du système de Van der-Pol. . . . .	47
4.3	Diagramme de bifurcation du système de Chua avec les portées du phase en $\eta = 5$ , et $\eta = 10$ , et $\eta = 10.35$ . . . . .	47
4.4	Les deux grand exposant de Lyapounov du système de Chua. . . . .	47
4.5	Diagramme de bifurcation du système de Lorenz avec les portées du phase en $\sigma = 2$ et $\sigma = 10$ . . . . .	48
4.6	exposant de Lyapounov du système de Lorenz. . . . .	48
4.7	Diagramme de bifurcation du système de Finance avec les portées du phase en $a = 4.05$ , $a = 0.45$ , et $a = 3$ . . . . .	49
4.8	L'exposant de Lyapounov du système de Finance. . . . .	49
4.9	Synchronisation entre le l'oscillateur de Chua et l'oscillateur de Van der Pol . . . . .	51
4.10	Synchronisation entre le l'oscillateur de Finance et l'oscillateur de Lorenz . . . . .	52

# Introduction générale

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle, et maintenant les systèmes dynamiques sont utilisées dans plusieurs domaines : géophysique, biologique, économique, médical...

En effet, vers la fin du ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe française Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.[5]

Dans le même siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. ils désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. La nature de cette étude diffère suivant le système dynamique étudié, nature qui dépend des outils utilisés (analytiques, géométriques ou probabilistes). Les travaux de Lyapunov, d'abord tombés dans l'oubli, seront plus tard très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos. En 1963 le météorologue Edward Lorenz expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minimale des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés : systèmes chaotiques. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marqué par des changements discontinus appelés bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On parle également, lors d'une telle transition, d'une perte de Stabilité structurelle. Donc pour l'étude mathématique des systèmes dynamiques on applique souvent la théorie de bifurcation.

Récemment, il y a eu un intérêt croissant pour la création de systèmes chaotiques en raison de ses applications potentielles en physique, réacteur chimique, théorie du contrôle, les réseaux biologiques, les réseaux de neurones artificiels, des télécommunications et des communications sécurisées.

En 1990, Pécora et Carroll ont présenté le concept de "synchronisation du chaos" pour la première fois, et ont introduit une méthode pour synchroniser deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes. A partir de cette date,

la synchronisation des systèmes chaotiques est devenue de plus en plus intéressante aux chercheurs dans des champs différents.

Récemment, la synchronisation de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires commence à attirer l'attention croissante dû à ses applications potentielles dans les communications sécurisées et les processus de contrôle. Durant cette décennie, plusieurs types de synchronisation (synchronisation complète ou identique, généralisée, de phase et projective) ont été étudiés, et beaucoup de méthodes ont été proposées. Ce mémoire est constitué d'une introduction et quatre chapitres. On rappelle dans le première chapitre quelques notions générales de système dynamique et dans le deuxième chapitre on présente l'étude du chaos. Dans le troisième chapitre on va donner quelques notions des systèmes chaotiques. En fin, nous allons étudier deux systèmes Vender Pol avec Chua et Finance avec Lorenz.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques

### 1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. La nature de cette étude diffère suivant le système dynamique étudié, nature qui dépend des outils utilisés (analytiques, géométriques ou probabilistes). Historiquement, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques. Une des questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire. Dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions de base sur les systèmes dynamiques (système autonomes et non-autonomes, espace des phases, point d'équilibre, bifurcation, ...).

### 1.2 Définitions et notations

Un système dynamique est une structure qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- Causale, où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent
- Déterministe, c'est-à-dire qu'à partir d'une «condition initiale» donnée à l'instant «présent» va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état «future» possible.

D'une autre manière :

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction. Il est défini par un triplet  $(X, T, f)$  constitué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état :

$$f : X \times T \rightarrow X$$



qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant. Il est classé en deux catégories :

- Système dynamique continue.
- Système dynamique discret.

### 1.2.1 Représentations mathématiques

Un Système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques encore appelés paramètres du système sont fixes.

### 1.2.2 Systèmes continus et systèmes discrets

- Dans le cas où la composante temps est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t, p) \text{ où } X \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, r \text{ et } n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

- Dans le cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative)

$$X_{k+1} = f(X_k, p), X_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3... \quad (1.2)$$

### 1.2.3 Systèmes autonomes ou non-autonomes

- Lorsque la variable libre  $t$  apparaît explicitement dans l'expression de  $f$ , le système est dit non-autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir.

- On peut toujours transformer un système non-autonome en système autonome (où  $t$  n'apparaît pas explicitement), en posant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = t \\ \dot{X}_{n+1} = f_{n+1}(X, p) = 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

On augmente ainsi la dimension du système d'une unité, mais cela permet de remplacer systématiquement  $t$  dans les équations par  $X_{n+1}$ . Les algorithmes de résolution de systèmes d'équations différentielles vous en remercieront.

### 1.2.4 Espaces des phases

**Définition 1.1.** *L'espace des phases est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique, on peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à moment*

donné, le degré de liberté caractérise l'espace des phases. Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'état.

### 1.2.5 Portrait de phases

**Définition 1.2.** *Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases. Étant donné un système dynamique,  $\dot{x} = f(x, t)$ , sans résoudre les équations, on peut toujours, à un instant  $t$ , représenter graphiquement (à l'aide de flèches) le champ des  $x'$ . La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système.*

### 1.2.6 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatifs est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale  $x_0$  un et un seul état final  $x(t)$ , il faut pour cela qu'il existe une application bijective  $\phi$  de l'espace des phases :

$$\begin{aligned} \phi : X \times \mathbb{R} &\longmapsto X \\ (x, t) &\longmapsto \phi_t(x) = \phi(x, t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\phi_t(x_0) = x_0 \tag{1.5}$$

$$\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0)) \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

## 1.3 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système.

En mathématique, dans la théorie des système dynamique, la section de Poincaré est l'intersection d'une trajectoire (périodique, quasi-périodique ou chaotique) dans l'espace d'au moins trois dimension un hyperplan d'une dimension inférieure.

Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension  $n$  et une surface de dimension  $(n - 1)$  définie dans cet espace. L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface. L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface représente la section de

Poincaré.

Considérons  $(x_0, t_0, t \equiv \varphi(x_0))$  une solution d'un système autonome :

$$\dot{x} = f(x)$$

on définit localement un hyperplan  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$ , transversal au champs de vecteurs  $f$  en  $x_0$ . On suppose maintenant un point  $x$  au voisinage  $V \subseteq \Sigma$  de  $x_0$ .

L'application de Poincaré  $P : V \implies \Sigma$  est définie par :

$$x_1 = p(x) = \varphi_\tau(x)$$

où  $\tau(x)$  est le temps après lequel la trajectoire retourne intersecte la première fois. L'hyperplan  $\Sigma$  s'appelle alors "section de Poincaré", et cette section remplace le système dynamique en temps continu par un système en temps discret. C'est une visualisation par échantillonnage du système avec une paramétrisation qui doit être choisie convenablement pour accéder au maximum d'information.

## 1.4 Poins d'équilibre

**Définition 1.3.** *Un point d'équilibre (ou point critique, ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation :*

$$\dot{X} = F(X).$$

*est un point  $X^*$  de l'espace des phases vérifiant :*

$$F(X^*) = 0.$$

*Dans l'espace de phase, le point fixe se représente par un point. Sa valeur est déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibre. De même, ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles.*

## 1.5 Point limite

**Définition 1.4.** *Un point  $a \in U$  est un point  $\omega$ -limite d'une trajectoire  $\phi(., x_0)$  s'il existe une suite  $t_n \implies +\infty$  quand  $n \implies +\infty$  tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x_0) = a$$

*, De même un point  $b \in U$  est un point  $\alpha$ -limite d'une trajectoire  $\phi(., x_0)$  s'il existe une suite  $t_n \implies -\infty$  quand  $n \implies -\infty$  tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi(t_n, x_0) = b$$

, L'ensemble de toutes les points  $\omega$ -limite d'un trajectoire est appelé ensemble  $\omega$ -limite et noté  $\omega(x_0)$ .

L'ensemble de toutes les points  $\alpha$ -limite d'un trajectoire est appelé ensemble  $\alpha$ -limite et noté  $\alpha(x_0)$ .

L'ensemble de  $\omega(x_0) \cup \alpha(x_0)$  est appelé ensemble limite.

## 1.6 Attracteurs et bassins d'attraction

**Définition 1.5.** Le bassin d'attraction est l'ensemble des points de l'espace des phases qui sont sous l'effet de l'attracteur c'est-à-dire que toute les trajectoires qui commence à ces points tendent vers l'attracteur après un temps fini.

Autrement dit, l'attracteur  $A$  n'est pas autre chose que la limite asymptotique des solutions partant de toute condition initiale située dans son bassin d'attraction.

Ainsi, l'ensemble  $W = \cup_{t < 0} \phi_t(V)$  est le bassin d'attraction de  $A$ .

Pour un système défini par les équations différentielle, le bassin d'attraction est reformulé pour une solution asymptotiquement stable  $x^*$ , c'est-à-dire l'ensemble des points initiaux  $x_0$  pour lesquels les solutions satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(x_0, t) - x^*(t)\| = 0$$

### 1.6.1 Ensemble invariant

**Définition 1.6.** Un ensemble  $M \subset X$  est dit invariant par un champ de vecteurs si toute solution  $X(t)$  du système différentiel associe au champ de vecteurs issue de  $M$  vérifie  $X(t) \subset M$  pour tout  $t$  pour lequel cette solution est définie.

### 1.6.2 Attracteurs

**Définition 1.7.** Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble des situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

**Définition 1.8 (3).** L'ensemble  $A$  est un attracteur si :

- Pour tout voisinage  $U$  de  $A$  il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ .
- $\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$ .
- Il existe une orbite dense dans  $A$ .

**Un attracteur manifeste les propriétés suivantes :**

★ Un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace est de volume nul invariant par flot. Autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout  $t$ .

★ Il existe un ensemble  $B \supset A$  tel que pour tout voisinage de  $A$  la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de

A. Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur, cette " zone d'influence" est le (Bassin d'attraction).

★ Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

### 1.6.3 Différents types d'attracteurs

Il ya deux types d'attracteurs : Les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

#### 1-Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques et peuvent être de trois sortes :

**-Point fixe** : c'est l'attracteur le plus simple il est représenté par un point dans l'espace de phase.

**-Cycle limite**(attracteur périodique) : c'est une trajectoire fermée qui attire toute les trajectoires proches.

**-Attracteur quasi-périodique**(tore) : c'est une trajectoire qui s'enroule le long d'un tore et remplir sa surface de manière dense et finira par se refermer sur elle même au un temps infini.

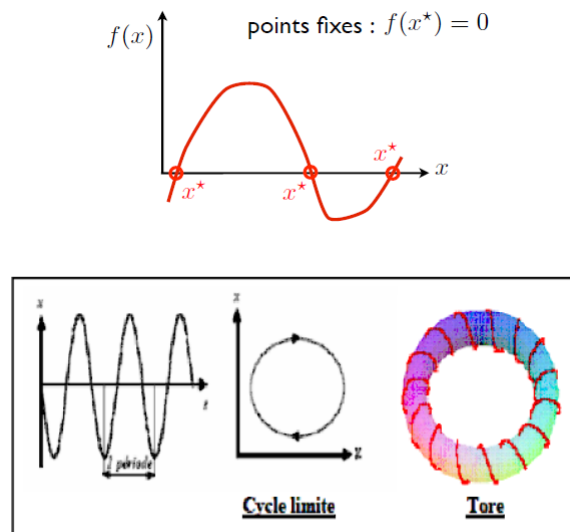


FIGURE 1.1 – Attracteurs réguliers

## 2-Attracteurs étranges

Ce sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques.

Le terme attracteur étrange a été utilisé pour la première fois par David Ruelle et Floris Takens en 1971, afin de décrire l'attracteur obtenu par une série de bifurcations d'un système modélisant le courant d'un liquide. En fait, avant l'article Ruelle et Floris, les attracteurs avaient déjà l'objet de publications mais ils sont restés ignorés. Cette appellation d'attracteur étrange fait appel à leur propriété peu commune, qui est leur dimension fractale. En effet la structure géométrique des trajectoires générées par un système chaotique est extrêmement complexe à cause des étirements, repliements et contractions s'opérant dans une région bornée de l'espace d'état. La section de Poincaré d'une trajectoire chaotique est constituée d'une infinité des couches fines, ce qui suppose que les trajectoires tendent à remplir un espace de dimension non entière, c'est-à-dire fractale (plus de détails dans le chapitre prochain). Les attracteurs étranges sont l'une des caractéristiques de l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

**Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :**

- Dans l'espace de phase l'attracteur est de volume nul.
- La dimension  $d$  de l'attracteur étrange est fractale (non entière) pour un système continue autonome  $2 < d < n$ ,  $n$  la dimension de l'espace de phase.
- Sensibilité aux conditions initiales :  
deux systèmes initialement voisins finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre.

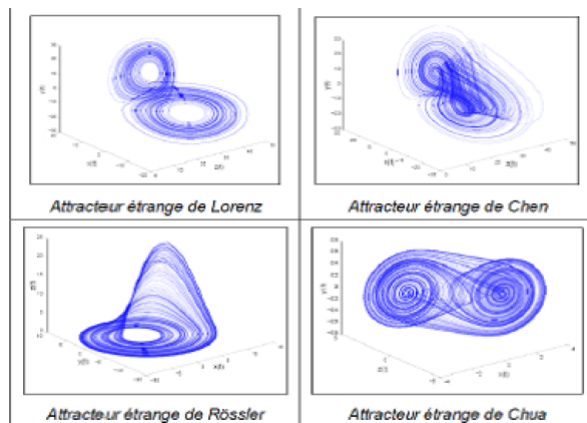


FIGURE 1.2 – Quelques exemples d'attracteurs étranges

### 1.6.4 Étude qualitative des systèmes dynamiques

L'étude qualitative permet de voir le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'équation différentielle. En particulier, elle permet l'étude locale des solutions autour de points d'équilibre. Pour avoir une étude complète d'un système

dynamique, on attend en général de la part de l'environnement un comportement stationnaire, ce dernier va être présenté par la disparition des phénomènes transitoires en annulant la fonction de transition ou le champ de vecteurs, dans ce cas le système va avoir l'un des deux états suivants :

- État d'équilibre (points fixes, points périodiques).
- État chaotique.

Pour faciliter cette étude, on utilise les propriétés de l'algèbre linéaire sur les équations qui décrivent nos systèmes dynamiques, or que la majorité des systèmes dynamiques associés à des phénomènes naturels ne sont pas linéaires, à cet effet on est obligé de les linéariser.

### Linéarisation des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.7}$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , et  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  et soit  $\bar{x}$  un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation  $\varepsilon(t)$  soit appliquée au voisinage du point d'équilibre  $\bar{x}$ . La fonction  $f$  peut être développée en série de Taylor au voisinage de point  $\bar{x}$  comme suit :

$$\varepsilon(t) + \bar{x} = f(\bar{x} + \varepsilon(t)) \simeq f(\bar{x}) + J_f(\bar{x}) \cdot \varepsilon(t) \tag{1.8}$$

où  $J_f(\bar{x})$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $f$  définie par :

$$J_{(f(\bar{x}))} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Comme  $f(\bar{x}) = \dot{\bar{x}}$  alors l'équation (1.8) devient :

$$\varepsilon(t) = J_f(\bar{x}) \cdot \varepsilon(t) \tag{1.10}$$

L'écriture(1.10) veut dire que le système(1.7) est linéarisé.

### Théorème de Hartmann-Grobman

**Définition 1.9.** Deux flots  $\varphi_t$  et  $\psi_t$  sont dits topologiquement équivalents dans un voisinages du point d'équilibre, s'il existe un homéomorphisme  $h$  qui envoie le point d'équilibre du premier flot en le point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots, c'est-à-dire :

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$$

Considérons le système dynamique (1.7). Soit  $\bar{x}$  un point d'équilibre du système (1.7) et soit  $J_f(\bar{x})$  la matrice Jacobienne au point  $\bar{x}$ , alors le théorème de Hartmann-grobman s'énonce :

**Théorème 1.1** (10). *Si  $J_f(\bar{x})$  admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage  $U$  de  $\bar{x}$  : Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire (1.7) à la dynamique du système linéarisé (1.10).*

### Classification de Poincaré des points d'équilibre

Il s'agit de distinguer ces points d'équilibre par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne (1.9) du système linéarisé (1.10) associé au système différentiel initial (1.7) en ce point.

Pour cette raison on va supposer que les valeurs propres de la matrice (1.9) sont définies par :

$$\lambda_i = \omega_i + j\sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Lorsque  $\omega_i \neq 0$  pour  $i=1,2,\dots,n$  le point d'équilibre est dit hyperbolique.

La solution du système linéarisé s'écrit à partir d'une base des fonctions indépendantes :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \cdot V^i \quad (1.11)$$

où  $V^i$  représente le vecteur propre associé à  $\lambda_i$  et  $C_i \in \mathbb{R}$  dépend des conditions initiales.

Donc les valeurs propres  $\lambda_i$  définissent l'état de stabilité, et on va citer les natures de ces points d'équilibre en étudiant la nature des  $\lambda_i$  :

- 1- Si  $\omega_i < 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . le point d'équilibre est asymptotiquement stable. On dit que le point est un "puits"(foyer) si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et un nœud si  $\sigma_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- 2- Si  $\omega_i > 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Le point d'équilibre est instable. On dit que le point est une "source" si  $\sigma_i \neq 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et un "noeud" si  $\sigma_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$
- 3- Si  $\omega_j > 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, p$  avec  $p < n$  et  $\omega_j < 0$  pour  $i \neq j$ , la solution est instable et le point est un "col".

- S'il n'y a pas de valeur propre nulle, on a un point selle.

### Notion de stabilité

#### Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.12)$$



avec  $f$  une fonction non linéaire.

**Définition 1.10.** Le point  $\bar{x}$  d'équilibre du système (1.12) est :

1. *Stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \sigma \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.13)$$

2. *Asymptotiquement stable si :*

$$\exists \sigma > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \sigma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - \bar{x}\| = 0 \quad (1.14)$$

3. *Exponentiellement stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \sigma \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - \bar{x}\| < a \|x(t_0) - \bar{x}\| \exp(-bt), \forall t > t_0 \quad (1.15)$$

4. *Instable si l'équation (1.13) n'est pas satisfaite.*

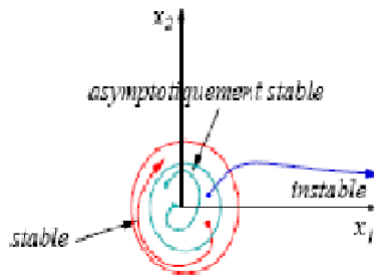


FIGURE 1.3 – Les types de stabilité

### Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $\bar{x}$  du système (1.12). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de  $\bar{x}$  s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative,  $\bar{x}$  est exponentiellement stable.
- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive,  $\bar{x}$  est instable.

**Remarque 1.1.** Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice jacobienne, et la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.

## Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Comme on a vu, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode.

**Théorème 1.2** (10). *Le point d'équilibre  $\bar{x}$  du système (1.12) est stable si il existe une fonction  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

*i)  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\bar{x} \in D$ .*

*ii)  $V(\bar{x}) = 0$  et  $V(x) > V(\bar{x}), \forall x \neq \bar{x}$  dans  $D$ .*

*iii)  $\dot{V} \leq 0, \forall x \neq \bar{x}$  dans  $D$ .*

*Si de plus pour  $x, \dot{V}(x) < 0, \forall x \neq \bar{x}$  dans  $D$  alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

*Si on suppose encore que  $V$  tend vers l'infini lorsque  $x \in \mathbb{R}^n$  tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de  $\bar{x}$ , tendent vers  $\bar{x}$  (on dit que  $\bar{x}$  est globalement asymptotiquement stable).*

## Théorème de la variété centrale

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, c) \quad (1.16)$$

Un système dynamique non linéaire,  $\bar{x}$  son point d'équilibre qu'on peut ramener à l'origine par le changement de variable :  $\xi = x - \bar{x}$  et soit  $J$  la matrice jacobienne d'ordre  $n$  associé au système (1.16) après sa linéarisation au voisinage de point fixe (après avoir considéré une petite perturbation  $\xi$  au voisinage de point fixe)

$$\frac{d\xi}{dt} = j \cdot \xi.$$

Soient :

•  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J$  dont la partie réelle est négative.

•  $u_1, u_2, \dots, u_i$  les valeurs propres de la matrice  $J$  dont la partie réelle est positive.

•  $s_1, s_2, \dots, s_c$  les valeurs propres dont la partie réelle est nulle, avec  $s + i + c = n$ .

Et soient :

•  $E^s$  le sous espace vectoriel de dimension  $s$  engendré par  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ .

•  $E^i$  le sous espace vectoriel de dimension  $i$  engendré par  $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ .

•  $E^c$  le sous espace vectoriel de dimension  $c$  engendré par  $\{s_1, s_2, \dots, s_c\}$ .  
avec

$$E^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c.$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 1.3** (10). *Il existe des variétés de classe  $C^r$  : stable  $W^s$ , instable  $W^i$ , et centrale  $W^c$  tangentes respectivement à  $E^s$ ,  $E^i$  et  $E^c$  en  $x_0$ . Ces variétés sont invariantes, par rapport au flot de système (1.16).*

### Variété centrale dépendant d'un paramètre

On applique une petite perturbation  $\varepsilon$  sur le système (1.16), donc le résultat sera un système dynamique dépendant d'un paramètre  $\varepsilon$  et supposons que par une certaine transformation on peut ramener le système (1.16) à un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + f(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{y} = A_2y + g(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{z} = A_3z + m(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

La variété centrale au voisinage de  $(0, 0, 0, 0)$  est alors donnée par :

$$y = h_1(x, \varepsilon), z = h_2(x, \varepsilon).$$

Après un simple calcul, et après avoir appliqué le développement de Taylor sur  $h_1$  et  $h_2$ . On peut donc écrire le système (1.17) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + f(x, h_1(x, \varepsilon), h_2(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Le théorème suivant permet de lier la dynamique du système (1.18) à celle du (1.17).

**Théorème 1.4** (10). *Si l'origine  $\hat{x} = 0$ , du système (1.18) est asymptotiquement stable (instable), alors l'origine du système (1.17) est aussi asymptotiquement stable (instable).*

## 1.7 Bifurcation

Le terme “bifurcation” est utilisé pour désigner dans un sens large, toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique suite à la variation de l'un des paramètres dont dépend le système étudié. Il existe plusieurs types de bifurcations, parmi les quelles on peut citer :

- Bifurcation noeud-col.
- Bifurcation transcritique.
- Bifurcation fourche (sou-critique ou sur-critique).
- Bifurcation verticale.

- Bifurcation de Hopf (super-critique ou sous-critique). Dans la suite, chaque bifurcation sera présentée graphiquement. Les conventions des représentations graphiques seront dans la figure (1.5).







	Objet stable
	Objet instable
	Equilibre stable
	Equilibre instable
	Point selle
	Trajectoire

FIGURE 1.4 – Conventions graphiques

### 1.7.1 Bifurcation noeud-col

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \mu \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.19)$$

Où  $\mu$  est un paramètre, qui peut être positif, négatif ou nul.

- Lorsque  $\mu < 0$  :

Dans ce cas, le système admet deux points d'équilibre de coordonnées  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$  et  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ . Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui, de manière générale, s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour le premier point d'équilibre  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$ , A est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|\mu|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe négatif :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2\sqrt{|\mu|}$ .

Par conséquent le point  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$  est un noeud asymptotiquement stable.

Pour le second point d'équilibre  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ , la matrice A devient :

$$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|\mu|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2\sqrt{|\mu|}$ .

Par conséquent le point  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$  est un point selle (col).

- Lorsque  $\mu = 0$  :

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.20)$$

qui admet l'origine comme unique point d'équilibre. Il s'agit d'un point non hyperbolique car la matrice Jacobienne est la suivante :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système est découpé en  $x$  et en  $y$ . L'étude de la première équation du système (1.20) montre que  $x = 0$  est un point d'équilibre non hyperbolique correspondant à un shunt positif. La seconde équation indique que  $y = 0$  est point d'équilibre asymptotiquement stable de la seconde équation.

- Lorsque  $\mu > 0$ ,

Dans ce cas, le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \mu \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.21)$$

Il n'admet aucun point d'équilibre. La variable  $x$  est toujours croissante. La variable  $y$  est croissante pour les  $y < 0$  et décroissante pour les  $y > 0$ .

Cette bifurcation est appelée une "bifurcation selle-noeud" et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibre, l'un instable (un point selle) et l'autre asymptotiquement stable (un noeud). D'une manière générale, cette bifurcation se produit lorsque deux isoclines de natures différentes, c'est-à-dire l'une verticale  $\dot{x} = 0$  et l'autre horizontale  $\dot{y} = 0$ , initialement disjointes, deviennent tangentes (à la bifurcation) et se coupent ensuite en deux points d'équilibre qui apparaissent.

La figure (1.5) représente le diagramme de bifurcation noeud-col.

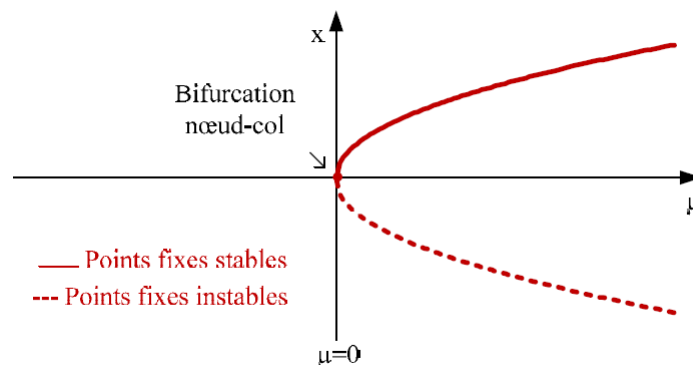


FIGURE 1.5 – Diagramme de la bifurcation noeud-col

## 1.7.2 Bifurcation transcritique

Il y a certaines situations scientifiques où un point fixe doit exister pour toutes les valeurs d'un paramètre et ne peut jamais être détruite. Par exemple, dans l'équation logistique et d'autres modèles simples pour la croissance d'une espèce unique, zéro est un point fixe, quelle que soit la valeur de la vitesse de croissance. Cependant, un tel point fixe peut changer sa stabilité quand le paramètre est modifié. La bifurcation transcritique est le mécanisme standard pour de tels changements dans la stabilité. La forme normale pour une bifurcation transcritique est :

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

Cela ressemble à une équation logistique, mais maintenant nous permettons  $x$  et  $\mu$  à être positif ou négatif.

- Pour  $\mu < 0$ , il y a un point fixe instable  $x^* = \mu$  et un point fixe stable  $x^* = 0$ .
- Lorsque  $\mu$  augmente, le point fixe instable s'approche de l'origine, et entre en fusion avec elle lorsque  $\mu = 0$ .
- Enfin, lorsque  $\mu > 0$ , l'origine est devenue instable, et  $x^* = \mu$  est maintenant stable.

La figure (1.6) représente le diagramme de bifurcation transcritique. Comme sur la figure, le paramètre  $\mu$  est considéré comme la variable indépendante, et les points fixes  $x^* = 0$  et  $x^* = \mu$  sont présentés comme variables dépendantes.

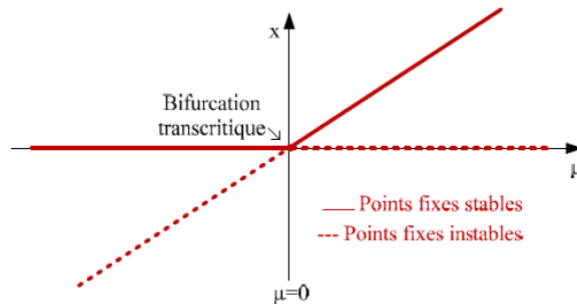


FIGURE 1.6 – Diagramme de bifurcation transcritique

**Remarque 1.2.** La différence importante entre la bifurcation noeud-col et la bifurcation transcritique est que : dans le cas transcritique, les deux points fixes ne disparaissent pas après la bifurcation, il change simplement de stabilité.

## 1.7.3 Bifurcation fourche (pitchfork)

On étudie ici la bifurcation des systèmes sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\mu - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.22)$$

On distingue trois cas selon le signe du paramètre  $\mu$  :

- Cas  $\mu < 0$  :

Dans ce cas, le système admet trois points d'équilibre, l'origine et deux autres points symétriques de coordonnées  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$  et  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ . Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui s'écrit de manière générale :

$$A = \begin{pmatrix} -\mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre origine, cette matrice s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} |\mu| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = |\mu|$ . Par conséquent l'origine est un point selle (instable). Aux deux autres points d'équilibre  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$  et  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ , la matrice jacobienne prend la même forme :

$$A^* = \begin{pmatrix} -2|\mu| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2|\mu|$ . Ainsi, ces deux points d'équilibre sont des noeuds asymptotiquement stables. Les isoclines verticales ( $\dot{x} = 0$ ) correspondent à trois droites : la droite  $x = 0$  et les deux droites  $x = \pm\sqrt{|\mu|}$ . L'isocline horizontale ( $\dot{y} = 0$ ) est la droite  $y = 0$ . Le portrait de phase peut alors être construit (Figure 1.7). Ce portrait de phase montre un point selle fixé à l'origine entouré de deux noeuds asymptotiquement stables, symétriques autour de l'origine et qui s'en éloignent lorsque  $|\mu|$  augmente.

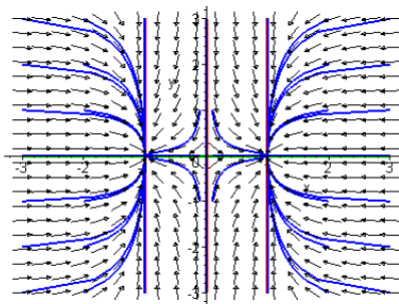


FIGURE 1.7 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour  $\mu < 0$ .

- Cas  $\mu = 0$  :

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.23)$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre unique, il est non hyperbolique car la matrice jacobienne en ce point s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la stabilité de ce point d'équilibre, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

Calculons  $\dot{V}$ . Il vient :

$$\dot{V}(x, y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2(x^4 + y^2)$$

Cette expression est strictement négative sur l'ensemble du plan, à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction  $V(x, y)$  est une fonction de Lyapunov forte pour le système (1.21). Par application du théorème de Lyapunov pour fonction forte, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable. Figure(1.8).

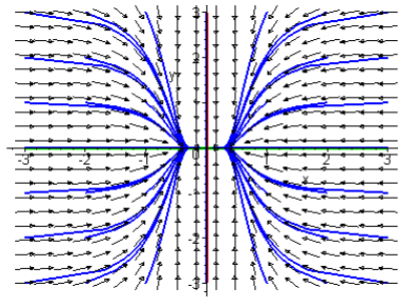


FIGURE 1.8 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour  $\mu = 0$

- Cas  $\mu > 0$  :

Dans ce cas, le système dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\mu - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.24)$$

Il n'admet qu'un unique point d'équilibre, l'origine. La matrice jacobienne en ce point s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -\mu$ . L'origine est donc un noeud asymptotiquement stable la figure (1.9).



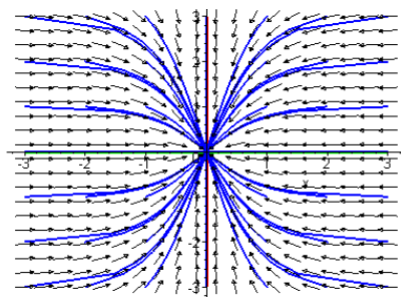


FIGURE 1.9 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour  $\mu > 0$

En résumé, à la valeur du paramètre  $\mu = 0$ , le système voit le nombre de points d'équilibre passer de trois à un. Pour  $\mu < 0$ , nous avons un point selle entouré de deux noeuds asymptotiquement stables. Pour  $\mu \geq 0$ , le système n'admet qu'un seul point d'équilibre asymptotiquement stable, l'origine.

Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure (1,10). Il s'agit là de la bifurcation fourche super-critique. Le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\mu + x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.25)$$

correspond par contre à une bifurcation fourche sous-critique dont le diagramme de bifurcation est donné sur la Figure (1,11).

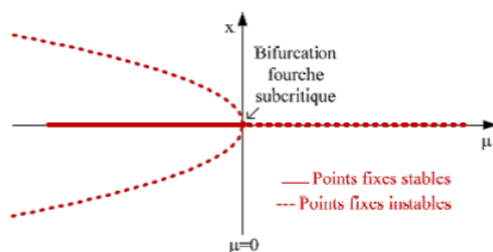


FIGURE 1.10 – Diagramme de bifurcation fourche super-critique

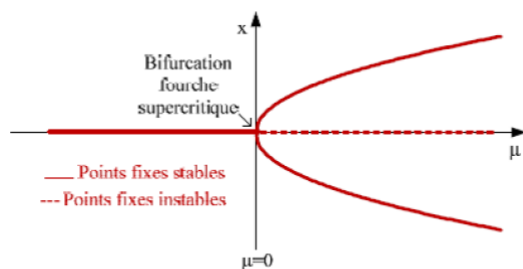


FIGURE 1.11 – Diagramme de bifurcation fourche sous-critique

### 1.7.4 Bifurcation verticale

Soit le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y \\ \dot{y} = -x + \mu y \end{cases} \quad (1.26)$$

On remarque en premier lieu que le système (1.26) est linéaire, ce qui sera le cas pour toutes les bifurcations verticales. Le cas non linéaire sera traité ultérieurement. Nous pouvons le réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \dot{X} = AX \quad (1.27)$$

Sous réserve que le déterminant de la matrice A soit non nul, ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine. La dynamique du système (1.27) dépend de la trace et du déterminant de la matrice A. Selon le signe de  $\mu$ , trois cas doivent être considérés.

- Cas  $\mu < 0$  : Dans ce cas, la trace de la matrice est égale à :  $-2 |\mu|$ , elle est négative et le déterminant  $\mu^2 + 1$  est strictement positif. Ceci permet d'affirmer que l'origine est asymptotiquement stable et qu'elle correspond à un foyer. En effet,  $\Delta = (-2 |\mu|)^2 - 4(\mu^2 + 1) = -4 < 0$ .
- Cas  $\mu = 0$  : Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

La forme du système (1.28) correspond au représentant de la classe d'équivalence topologique des centres. Ainsi, l'origine correspond à des centres car le modèle est linéaire.

- Cas  $\mu > 0$  : Dans ce cas, la trace de la matrice vaut  $2\mu$ , elle est cette fois strictement positive. Le déterminant reste inchangé et strictement positif. L'origine est donc un foyer instable car le discriminant de l'équation caractéristique reste strictement négatif.

Cette bifurcation est appelée verticale. A la bifurcation, pour la valeur du paramètre  $\mu = 0$ , le point d'équilibre unique à l'origine change de nature. Pour

$\mu < 0$ , nous avons un foyer asymptotiquement stable. Pour  $\mu > 0$ , l'origine devient un foyer instable. A la bifurcation,  $\mu = 0$ , l'origine correspond à des centres. Cette bifurcation correspond à un système linéaire dont le déterminant est toujours positif et dont la trace change de signe.

Une autre manière de considérer cette bifurcation est de calculer les valeurs propres de la matrices A qui sont complexes conjuguées et égales à  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ . La partie réelle des valeurs propres est  $Re(\lambda_{1,2}) = \mu$  et la partie imaginaire est  $Im(\lambda_{1,2}) = \pm 1$ . En d'autres termes, les valeurs propres traversent l'axe imaginaire à la bifurcation. Ainsi, lorsque  $\mu = 0$ , la partie réelle des valeurs propres s'annule donnant des centres et change de signe avec le paramètre  $\mu$ , ce qui correspond au passage d'un foyer asymptotiquement stable ( $\mu < 0$ ) à un foyer instable ( $\mu > 0$ ). Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure (1.12).

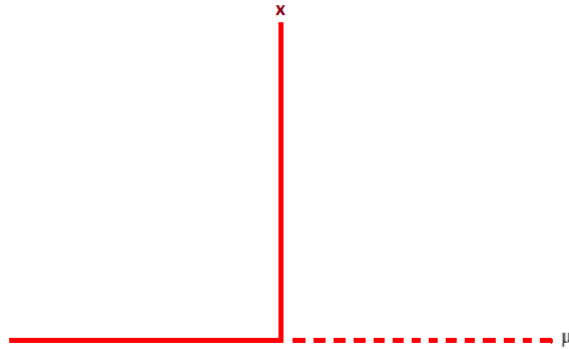


FIGURE 1.12 – Diagramme de la bifurcation verticale.

La barre verticale en  $\mu = 0$  signifie que le point d'équilibre peut prendre n'importe quelle valeur, on aura toujours des centres.

La bifurcation verticale correspond à un système linéaire dont la trace de la matrice change de signe à déterminant positif. Nous allons maintenant étudier le cas d'un système non linéaire dont la partie linéaire se comporte de la même manière que précédemment. Cette situation correspond à la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

## 1.7.5 Bifurcation de Hopf

### Bifurcation super-critique de Hopf

Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{Partie non linéaire}} \quad (1.29)$$

Ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine. Il est écrit sous la forme d'une somme de deux termes : une partie linéaire (identique au système linéaire

de la bifurcation verticale) et une partie non linéaire. La partie linéaire est donc caractérisée par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice est égale à  $2\mu$ , le déterminant à  $\mu^2 + 1$  et le discriminant de l'équation caractéristique vaut  $-4$ .

Comme nous l'avons vu précédemment, les valeurs propres de la matrice  $A$  sont complexes conjuguées et égales à  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ . La partie réelle des valeurs propres est  $Re(\lambda_{1,2}) = \mu$  et la partie imaginaire est  $Im(\lambda_{1,2}) = \pm 1$ . Lorsque le paramètre  $\mu$  change de signe, l'origine passe de foyer asymptotiquement stable à foyer instable. Le système linéarisé prévoit des centres lorsque le paramètre  $\mu$  est égal à zéro. Du fait de la non linéarité du système, nous allons voir que ces centres ne sont en fait pas conservés.

Pour déterminer la stabilité de l'origine, considérons la fonction définie positive suivante :  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . La dérivée  $\dot{V}$  s'écrit :  $\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2)^2$ .  $\dot{V}$  est strictement négative sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction  $V(x, y)$  est une fonction de Lyapunov forte pour le système (1.29). Ainsi, les centres prévus par la linéarisation ne sont pas conservés et par le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable lorsque  $\mu = 0$ . Par ailleurs, le domaine d'attraction de l'origine est  $\mathbb{R}^2$ .

Afin de préciser l'allure du portrait de phase, effectuons le changement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Les coordonnées polaires sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r^2 & = x^2 + y^2 \\ \tan \theta & = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.30)$$

Ces relations permettent d'effectuer le passage inverse c'est-à-dire des coordonnées polaires vers les coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} x & = r \cos \theta \\ y & = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.31)$$

Dérivons la première des équations (1.30) par rapport au temps, il vient :

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = r^2(\mu - r^2).$$

Dérivons maintenant la seconde équation par rapport au temps :  $\frac{d \tan \theta}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{-r^2}{r^2 \cos^2 \theta}$  Finalement, en coordonnées polaires, le système s'écrit sous la forme des deux équations découplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} & = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} & = -1 \end{cases} \quad (1.32)$$

La seconde équation admet la solution suivante :  $\theta(t) = -t + \theta(0)$  Où  $\theta(0)$  est la valeur de l'angle à  $t=0$ . Cette équation montre que l'angle varie avec une vitesse angulaire constante  $w = -1$ . Les trajectoires vont tourner autour de l'origine.

La première équation gouverne la variation de la distance à l'origine. Selon le signe du paramètre  $\mu$ , le nombre de points d'équilibre varie :

- $\mu \leq 0$  :  
L'équation admet un seul point d'équilibre  $r=0$  qui est asymptotiquement stable.
- $\mu > 0$  :  
L'équation (1.30) admet deux points d'équilibre positifs  $r=0$  et  $r = \sqrt{\mu}$ . Le premier est instable et le second est asymptotiquement stable. Le second point d'équilibre de l'équation (1.32) correspond donc à un cercle de rayon  $r = \sqrt{\mu}$  qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire  $w=-1$ . Il s'agit d'un cycle limite asymptotiquement stable.

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

- $\mu < 0$  : l'origine est point d'équilibre unique et est un foyer stable.
- $\mu = 0$  : l'origine est le point d'équilibre unique et est asymptotiquement stable.
- $\mu > 0$  : l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite asymptotiquement stable de rayon  $r = \sqrt{\mu}$ .

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation en faisant apparaître les points d'équilibre, leur nature mais aussi les cycles limites dont l'amplitude est représentée en ordonnée Figure (1,13). On utilisera la même notation pour les cycles limites que pour les points d'équilibre : stabilité asymptotique en trait plein et instabilité en pointillés.

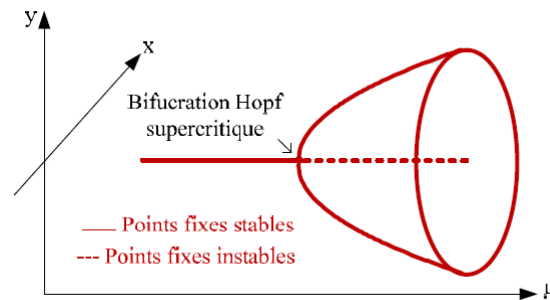


FIGURE 1.13 – Diagramme de la bifurcation de Hopf super-critique.

Cette bifurcation s'appelle une bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf. A la bifurcation, le point d'équilibre à l'origine devient instable et s'entoure d'un cycle limite stable dont, l'amplitude (le rayon) augmente avec la racine carrée du paramètre de bifurcation. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est asymptotiquement stable, on parle de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique.

### Bifurcation sous-critique de Hopf

On considère cette fois le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{Partie non linéaire}} \quad (1.33)$$

La partie linéaire de ce système est identique au cas précédent avec les mêmes conclusions. Cependant, à la bifurcation, la dérivée  $\dot{V}$  s'écrit maintenant de la manière suivante :  $\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2)^2$ .  $\dot{V}$  est strictement positive sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Ainsi, par le théorème de Lyapunov, l'origine est cette fois instable lorsque  $\mu = 0$ .

Le passage en coordonnées polaires conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(\mu + r^2) \\ \dot{\theta} &= -1 \end{cases} \quad (1.34)$$

L'angle varie avec une vitesse angulaire constante  $w = -1$ . Selon le signe du paramètre  $\mu$ , le nombre de points d'équilibre de l'équation (1.34) varie :

- $\mu < 0$  :  
L'équation admet deux points d'équilibre positifs  $r=0$  et  $r = \sqrt{|\mu|}$ . Le premier point d'équilibre est asymptotiquement stable et le second est instable. Celui-ci correspond à un cercle de rayon  $r = \sqrt{|\mu|}$  qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire  $w = -1$  et entourant un foyer asymptotiquement stable. Il s'agit donc d'un cycle limite instable.
- $\mu \geq 0$  :  
L'équation admet un seul point d'équilibre  $r = 0$  qui est instable.

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

- $\mu < 0$  :  
l'origine est point d'équilibre unique et est un foyer stable entouré d'un cycle limite instable de rayon  $r = \sqrt{|\mu|}$ .
- $\mu = 0$  :  
l'origine est le point d'équilibre unique et est instable.
- $\mu > 0$  :  
l'origine est un foyer stable.

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation Figure (1,14).

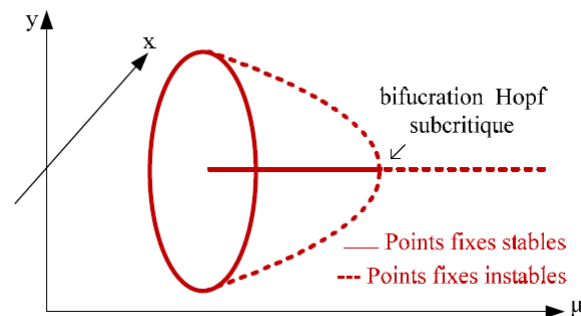


FIGURE 1.14 – Diagramme de la bifurcation de Hopf sous-critique.

Cette bifurcation s'appelle la bifurcation sous-critique de Hopf. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est instable, on parle de bifurcation de Hopf sous-critique. Dans les deux exemples précédents, nous avons utilisé le système sous la forme générique. Lors de l'étude d'un système non linéaire quelconque, le système n'est pas

nécessairement sous cette forme initialement. Cependant, après quelques changements de variables, il est possible de le mettre sous une forme adaptée permettant d'appliquer un théorème pour prévoir l'existence de cycle limite.

### **La valeur numérique du paramètre de bifurcation de Hopf**

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu)$$

qui a un point fixe  $x = x^*(\mu_r)$  et que sa matrice jacobienne possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm iw(\mu)$  telle que :

pour une certaine valeur d'un paramètre  $\mu = \mu_r$ ,  $\alpha(\mu_r) = 0$  et  $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}|_{\mu=\mu_r} \neq 0$  les  $n-2$  autres valeurs propres évaluées en  $\mu$  aient leur partie réelle strictement négative. Si ces hypothèses sont satisfaites alors  $(x^*(\mu_r), \mu_r)$  est un point de bifurcation de Hopf de l'état d'équilibre  $x^*(\mu_r)$  vers un cycle limite.

# Chapitre 2

## Théorie du chaos

### 2.1 Introduction

Depuis longtemps, le chaos était synonyme de désordre et de confusion. Il s'opposait à l'ordre et devait être évité. La science était caractérisé le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité. Poincaré fait l'un des premier à entrevoir la théorie du chaos. Il découvre la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes.

Le terme "chaos" définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long termes. Des chercheurs d'horizons divers ont alors commencé à s'intéresser à ce comportement. Il ont cherché à répondre à des questions telles que :

Les arythmies cardiaques ou les variations d'une population animale abaissent-elles à des règles ?

Les mouvements commerciaux ou les marchés financiers peuvent-il s'expliquer ?

Le chaos a ainsi trouvé de nombreuses applications dans les domaines tant physiques que biologique, chimique ou économique.

Ans, nous nous intéressons principalement dans ce chapitre aux caractéristiques du chaos, l'attracteur étrange et nous attardant sur les détection du chaos.

### 2.2 Définition du chaos

En général il n'y pas de définition rigoureuse du chaos, car ce phénomène est plus une notion philosophique qu'une notion scientifique. On peut observer le phénomène du chaos dans plusieurs domaines, mais comment le formaliser ? La réponse est négative car jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une théorie générale qui donne une explication ou une caractérisation finale de ce phénomène.

Tout ce qu'il est possible de dire est qu'il existe plusieurs critères physiques qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique.

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$



où  $x \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état, et soit  $\phi_t(x_0)$  la solution de l'équation qui passe par  $x_0$  quand  $t = t_0$ . Nous introduisons la série suivante de définitions données en qui nous permet de donner des définitions assez claires sur le phénomène du chaos.

**Définition 2.1** (13). *On dit que la fonction  $f : I \rightarrow I$  possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour un certain  $x \in I$  et un certain voisinage  $V \subset I$  de  $x$ , il existe  $y \in I$  tel que*

$$\| f^n(x) - f^n(y) \| > \delta.$$

**Définition 2.2.** (*Ensemble dense*)

*soit  $Y \subset X$ . On dit que  $Y$  est dense dans  $X$  si, pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in Y$  arbitrairement proche de  $x$ , autrement dit  $Y$  est dense dans  $X$  si pour tout  $x \in X$  on peut trouver une suite  $\{y_n\}$  de  $Y$  qui convergent vers  $x$ .*

**Théorème 2.1.** (*Théorème de Devaney*)[13]

*Soit la fonction  $f : I \rightarrow I$*

- i) Si la fonction  $f$  est sensible aux conditions initiales.*
- ii) la fonction  $f$  est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts  $U, V \subset I$ , il existe  $k > 0$  tel que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .*
- iii) Les points périodiques de la fonction  $f$  sont denses dans  $I$ .*

*Alors la fonction  $f$  est chaotique.*

**Définition 2.3.** *Soit un ensemble  $V$ , la fonction  $f : I \rightarrow I$  est dite chaotique sur  $V$  si :*

- 1.  $f$  possède une sensibilité aux conditions initiales.*
- 2.  $f$  est topologiquement transitive.*
- 3. les points périodiques sont denses dans  $V$ .*

**Remarque 2.1.** *Cette définition est certainement la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables. De plus, elle s'applique à un très grand nombre de systèmes dynamiques chaotiques et dans certains cas elle est même facilement vérifiable.*

## 2.3 Propriétés du chaos

Les définitions et propriétés suivantes permettent d'analyser qualitativement les points marquants des systèmes chaotiques.

### **La non-linéarité :**

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique. La notion de système dynamique est relative à tous les systèmes dont l'évolution dépend du temps. En général, pour prévoir des phénomènes réels générés par ces systèmes, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.

### **Le déterminisme :**

Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes. Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer), son évolution au cours du temps : la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, (l'instant initial) permet le calcul précis de l'état de système à n'importe quel autre moment.

### **La Sensibilité aux conditions initiales :**

Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles. Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. L'un des premiers chercheurs à s'en être aperçu fut Edward Lorenz qui s'intéressait à la météorologie et par conséquent aux mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Il illustre ce fait par l'effet papillon. Il est clair que la moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale ne permet pas de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et en conséquence de faire une prédiction sur l'évolution à long terme du système, une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.

## 2.4 Attracteurs chaotiques

L'attracteur chaotique (ou étrange) est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

**Définition 2.4.** Soit  $A$  un ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  est un attracteur, alors  $A$  est appelé attracteur étrange si il est chaotique (l'attracteur vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales), Un lecteur intéressé pourra consulter.

**Définition 2.5.** Un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $V$  de  $A$ , c'est à dire que pour tout point de  $A$  il existe une boule contenant ce point et contenue dans  $V$  vérifiant les propriétés suivantes :

- 1- *Attraction* :  $V$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $V$ , est entièrement contenue dans  $V$ . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.
- 2- Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. sa dimension est fractale (non entière).
- 3- Presque toute trajectoire sur l'attracteur à la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.
- 4- Deux trajectoires proches à l'instant  $t$  voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

### Les différents types d'attracteurs chaotiques

Nous donnons une classification commune d'attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques. En règle générale, à l'heure actuelle, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types (catégories) principales :

#### 1- **Attracteur hyperbolique :**

Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles-limites pour lesquelles "l'axiome  $A$ " de Smale (La condition essentielle qui caractérise la stabilité structurelle est appelée axiome  $A$ ) est satisfait, il sont structurellement stables. Les points périodiques et les orbites homoclines sont denses et sont du type selle, les ont la même dimension, et les variétés stables et instables se coupent transversalement.

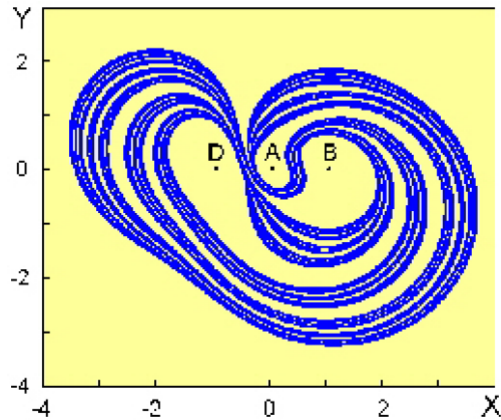


FIGURE 2.1 – Attracteur de Plykin

Cette définition est le résultat d'une fondation axiomatique rigoureuse qui exploite la notion d'hyperbolicité. L'attracteur Plykin est l'exemple d'un attracteur hyperbolique d'un difféomorphisme sur une sphère à dimensions deux, ce qui a été suggéré par Plykin (Figure 2.1). Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à la classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques. Les attracteurs étranges hyperboliques sont robustes (structurellement stable). Comme un autre exemple physique du chaos hyperbolique on cite l'attracteur de Smale-Williams.

2- **Attracteur de type Lorenz :**

Les attracteurs de types Lorenz ne sont pas structurellement stables, mais leur orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques), et aucun orbites périodiques instables apparaissent sous les petits variations des paramètres, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même.

3- **Quasi-attracteurs :**

Les quasi-attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables. Par exemple, les attracteurs générés par le circuit de Chua. Notez que ce type est plus complexe que les deux précédents-attracteurs et donc ne convient pas pour certaines applications potentielles de chaos, telle que : la sécurité des communications et le masquage du signal. Pour plus d'informations sur ces types d'attracteurs chaotiques.

## 2.5 Détection du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si des systèmes non linéaires sont ou non chaotiques. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en œuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui, d'ailleurs, sont complémentaires : la dimension fractale et les exposants de Lyapunov.

### 2.5.1 Les exposants de Lyapunov.

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système sensible à de très petites variations de la condition initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations des conditions initiales, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Un système de dimension  $n$  possède  $n$  exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant positif selon au moins un axe, tout en rendant compte que la somme des exposants est négative (respectivement nulle) pour les systèmes dissipatifs (respectivement conservatifs).

Un exposant de Lyapunov positif (respectivement négatif) selon une direction, indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente (respectivement diminue) exponentiellement avec le temps. C'est une caractéristique d'un attracteur. A titre d'exemple, les types d'attracteurs d'un système tridimensionnel en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont donnés dans le tableau suivant :

## 2.6 Dimension fractale

Plusieurs dimensions ont été proposées, on cite quelques une : il ya la dimension de Kolmogorov, dimension de Corrélacion et dimension de Lyapunov, il ya une différence légère entre chacune de ces dimension, mais elles caractérisent, toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les propriétés suivantes :

- a)  $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$
- b)  $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$
- c)  $d(A \times B) = d(A) + d(B)$

## 2.7 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

### **2.7.1 L'intermittence vers le chaos**

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

### **2.7.2 Le dédoublement de période**

Il est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, etc...

Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

### **2.7.3 La quasi-périodicité**

Il intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique. Ce scénario un peu compliqué est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de Jean Christophe Yoccoz, lauréat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

# Chapitre 3

## Synchronisation des systèmes chaotiques

### 3.1 Introduction

L'histoire de la synchronisation remonte au dix-septième siècle, quand le scientifique néerlandais, Christian Huygen(1629,1695) remarqua ce phénomène en étudiant deux horloges de fréquences légèrement différentes . Il constata qu'en les reliant l'une à l'autre avec un morceau de bois elles affichaient toutes les deux même heure c'est-à-dire que les deux horloges avaient une parfaite synchronisation. S'il les perturbait, elles se resynchronisaient en une demi-heure, et s'il les éloignait, la synchronisation cessait. Dans la terminologie moderne, cela signifie que les deux horloges ont été synchronisées. Récemment, les chercheurs de la synchronisation se sont intéressés aux systèmes chaotiques. Et comme ces derniers sont caractérisés par la sensibilité aux conditions initiales, la synchronisation entre deux systèmes chaotiques paraissait impossible. Mais les travaux de plusieurs scientifiques dans ce domaine ont montré le contraire.

En 1990, des travaux du Hubler ont démontré que les systèmes d'entraînement avec les signaux apériodiques pourraient induire certains comportements intéressants comme la résonance ou la stimulation non linéaire des modes particuliers. pour conduire un système non linéaire provient des travaux de Carroll et Pecora, leurs travaux concentrés sur une configuration spéciale impliquant deux systèmes couplés.[9]

### 3.2 Les systèmes couplés

**Définition 3.1.** *Deux systèmes chaotiques identiques oscillant de façon totalement indépendante.*

*Si par un moyen quelconque, on leur permet d'échanger de l'énergie, action que l'on nomme "couplage".*

*Ou bien : deux oscillateurs sont couplés si l'existence d'une perturbation dans l'un entraîne une perturbation dans l'autre, ce qui se traduit par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement est appelé accouplement mutuel.*

Après ce cas particulier on donne la définition d'accouplement pour deux systèmes dynamiques .

**Définition 3.2.** *On a deux systèmes dynamiques chaotiques présentés par :*

$$\dot{X} = f_1(X, t) \quad (3.1)$$

$$\dot{Y} = f_2(Y, t) \quad (3.2)$$

*Les deux systèmes sont couplés si on peut réécrire les équations (3.1) et (3.2) sous la forme :*

$$\dot{X} = g_1(X, X, Y, t) \quad (3.3)$$

$$\dot{Y} = g_2(Y, X, Y, t) \quad (3.4)$$

*avec  $g_1, g_2$  sont des fonctions non linéaires, où la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième sont le résultat de l'effet d'accouplement. La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, dans ce cas on parle de l'accouplement bidirectionnel.*

### 3.2.1 Accouplement unidirectionnel

Si on pose deux systèmes dynamiques identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (3.5)$$

$$\dot{Y} = f(Y, t) \quad (3.6)$$

Alors l'équation (3.6) va être modifier par l'effet d'accouplement et si le résultat de cette modification nous donne une nouvelles équations de la forme :

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (3.7)$$

$$\dot{Y} = g(Y, X, t) \quad (3.8)$$

tel que  $g(Y, X, t) = f(Y, t)$  pour  $X = Y$ , dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel.

Donc le premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième système récepteur (esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur a un acte sur le récepteur et le contraire est faux. Ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel, mais dans cette travail on s'enterrât à l'accouplement unidirectionnel.

Dans ce cas l'énergie est transférée d'un système a l'autre dans un seul sens.

On distingue deux méthodes d'accouplement unidirectionnel parmi plusieurs autres : la première méthode est par contrôle continu, et la deuxième est par remplacement des variables.



### 3.2.2 Méthode d'accouplement par contrôle continu

Dans cette méthode Le système émetteur est toujours donné par l'équation (3.7) tandis que le système récepteur est donné par l'équation :

$$\dot{Y} = g(Y, X) = f(Y, t) + M_{n \times n}(X - Y) \quad (3.9)$$

tel que :  $M_{n \times n}$  une matrice diagonale carré d'ordre  $n$ , et elle est constituée des éléments constants de la force d'accouplement.

### 3.2.3 Méthode d'accouplement par remplacement des variables

[9] Cette méthode est décomposer le système émetteur, qui est représenté par l'équation (3.7) en deux sous systèmes présentés par :

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2) \quad (3.10)$$

$$\dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2) \quad (3.11)$$

avec  $X_1 \in \mathbb{R}^d$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $d + m = n$  et  $X = (X_1, X_2)$ .

Dans ce cas le système récepteur est donné par l'équation suivante :

$$\dot{Y} = f_2(X_1, Y) \quad (3.12)$$

## 3.3 La synchronisation

La synchronisation est un mot du racine grecque (qui signifie "partager le temps commun").

La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système. Il existe deux types de synchronisation : La synchronisation unidirectionnelle et la synchronisation bidirectionnelle. Dans la synchronisation bidirectionnelle la boucle de retour est appliquée sur les deux systèmes à la fois. Par contre, dans le cas de la synchronisation unidirectionnelle la boucle de retour est appliquée sur l'un des deux systèmes.

### 3.3.1 Définitions mathématiques de la synchronisation

La définition mathématique de la synchronisation,[4] ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, t), \frac{dy}{dt} = f_2(y, x, t), \quad (3.13)$$

où,  $X \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ , sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes. Soit  $\varphi(\omega_0)$  une trajectoire du système globale donné par (3.13) avec la condition initiale  $\omega_0 = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Pour chaque sous-système on forme une trajectoire  $\varphi_X(\omega_0)$  et  $\varphi_Y(\omega_0)$  ( $\omega_0$  étant une condition initiale donnée).

On note par  $\chi$  l'espace de toutes les trajectoires du premier sous-système, et par  $\zeta$  l'espace de toutes les trajectoires du second sous-système, et on considère deux fonctions (propriétés)  $g_x : \chi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $g_y : \zeta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  qui ne sont pas identiquement nulle, le premier  $\mathbb{R}$  représente le temps, nous disons que les fonctions,  $g_x$  et  $g_y$ , sont des propriétés des sous-systèmes définis par (3.13) respectivement. Enfin, pour définir un état synchronisé, Brown et Kocarev exigent une fonction  $h(g_x, g_y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que  $\|h\| = 0$  ou  $\|h\| \rightarrow 0$  (où  $\|\cdot\|$  est toute norme). Nous disons que la fonction  $h$ , qui est indépendante du temps, compare les propriétés mesurées sur les deux sous-systèmes.

Les deux mesures conviennent dans le temps si et seulement si  $h(g_x, g_y) = 0$ . Avec ces préliminaires, on a les définitions suivantes pour la synchronisation :

**Définition 3.3.** *Les sous-systèmes dans les équations (3.13) sont synchronisés sur la trajectoire de  $\varphi(\omega_0)$ , par rapport aux propriétés  $g_x$  et  $g_y$ , s'il existe un instant indépendant de l'application  $h$  tel que  $\|h(g_x, g_y)\| = 0$ .*

**Définition 3.4.** *Les sous-systèmes dans les équations (3.13) sont synchronisés, par rapport aux propriétés  $g_x$  et  $g_y$ , s'il existe un instant indépendant de l'application  $h$  tel que  $\|h(g_x, g_y)\| = 0$  sur toutes les trajectoires.*

*Avec le choix de  $g_x, g_y$  et  $h$  on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe des différents types de synchronisation.*

### 3.3.2 Différents types de synchronisation

Parallèlement au développement des méthodes, différents type de synchronisation ont été proposés : Synchronisation identique, Synchronisation de phase, Synchronisation généralisée et Synchronisation de retard.

#### 3.3.3 Synchronisation identique

Elle a été la première découverte et est la forme la plus simple de la synchronisation des systèmes chaotiques. Ce type de synchronisation est proposée par Pecora et Carroll.

L'idée de la synchronisation identique est de diviser le système initial en deux sous-systèmes. Cette opération peut être réalisée d'une manière arbitraire.

En raison de leur caractéristique essentielle d'afficher une grande sensibilité aux conditions initiales.

En conséquence, deux systèmes chaotiques identiques, à partir de presque les mêmes points initial dans l'espace de phase, développent sur des trajectoires qui deviennent corrélées au cours du temps. Néanmoins, il a été démontré qu'il est possible de synchroniser ces types de systèmes, de les faire évoluer sur la même trajectoire

chaotique. Quand on a affaire à des systèmes couplés identiques, la synchronisation apparaît comme l'égalité des variables d'état, tout en évoluant dans le temps. Nous nous référons à ce type de synchronisation la synchronisation complète (CS).

D'autres noms ont été donnés dans la littérature, tels que la synchronisation conventionnelle ou la synchronisation identique.

La synchronisation identique ou la synchronisation complète a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnel des systèmes dynamiques. Elle peut être détectée non seulement dans les systèmes autonomes, mais aussi dans les systèmes non autonomes, et elle est basée sur les propriétés d'accouplement de deux systèmes ou plus, si ces systèmes sont identiques, on parle de la synchronisation identique, et s'ils sont différents on parle de la synchronisation généralisée.

• On suppose qu'on a deux systèmes dynamiques identiques liés par un accouplement unidirectionnel et représentés par les équations suivantes :

$$\dot{X} = f(X, t) \tag{3.14}$$

$$\dot{Y} = g(Y, X, t) \tag{3.15}$$

**Définition 3.5.** On dit qu'il y a une synchronisation identique entre ces deux systèmes si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |Y(t) - X(t)| = 0 \tag{3.16}$$

Pour toutes conditions initiales  $X(0)$ ,  $Y(0)$ , des deux systèmes.

**Remarque 3.1.**

CS est un cas particulier de la définition pour lesquels  $n=m$  et  $y=x$ .

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qu'on s'appelle " système erreur". Ce dernier représente la perturbation qui peut exister entre le système émetteur et le système récepteur. La question qu'on peut poser ici : est-ce que cette perturbation va tendre vers le zéro exponentiellement ou non ?

À cet effet, on va supposer que la petite perturbation entre les deux systèmes est donnée par l'équation :

$$e = Y - X$$

L'évolution de cette dernière par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{de}{dt} = g(X, Y) - f(X) \tag{3.17}$$

On a obtenu un système dynamique, et on va étudier sa stabilité, pour cela il suffit de Linéariser le système (3.17) au voisinage de ces points d'équilibre. Ou bien Utiliser la deuxième méthode de Lyapunov, (pour cela il suffit de choisir une fonction qui vérifie les conditions nécessaires de stabilité).

Il est bien clair que le seul point d'équilibre est le point  $X = Y$ .  
Alors la linéarisation du système(3.17) nous donne :

$$\frac{de}{dt} = J(X).e \quad (3.18)$$

avec

$$J(X) = \left[ \frac{dg(X, Y)}{dY} \right]_{X=Y}$$

est la matrice jacobienne associée.

Puis on calcule les exposants de Lyapunov du système récepteur pour garantir sa stabilité asymptotique.

Maintenant nous allons proposer deux méthodes de synchronisation identique, la méthode de Carroll et Pecora et la méthode du contrôle continu, et notre étude se concentrera sur les systèmes continus car la plupart des idées exposées peuvent être facilement étendu à des systèmes discrets.

### Synchronisation par la méthode du contrôle continu

Il est évident que la matrice jacobienne dans cette partie dépend bien sûr de la matrice  $M_{n \times n}$  de l'équation (3.9). Pour cela on va considérer les deux systèmes chaotiques présentés par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ \dot{Y} = f(Y) + M_{n \times n}(Y - X) \end{cases} \quad (3.19)$$

avec  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_1, \dots, y_n)$ ,  $f$  une fonction non linéaire et  $M_{n \times n}$  une matrice carrée diagonale d'ordre  $n$ .

Comme  $f$  est non linéaire, donc on peut réécrire le système (3.19) sous la forme :

$$\dot{X} = A.X + \phi(X). \quad (3.20)$$

$$\dot{Y} = A.Y + \phi(Y) + M_{n \times n}(Y - X) \quad (3.21)$$

telle que  $A$  une matrice constante,  $\phi$  une fonction qui représente la partie non linéaire de chaque système. Dans cette partie, la dynamique du système erreur est donnée par :

$$\dot{e} = A.e + \phi(Y) - \phi(X) + M_{n \times n}.e \quad (3.22)$$

Donc selon l'équation (3.22) on peut étudier la stabilité du système erreur au voisinage de l'origine.

### La synchronisation par la méthode de Carroll et Pecora

Certains systèmes chaotiques possèdent la propriété d'auto-synchronisation, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en deux sous-systèmes, l'un maître, l'autre esclave. Ces derniers peuvent se synchroniser sous l'effet d'un couplage avec signal commun.

En 1990, Carroll et Pecora ont montré que : Si on substitue une variable d'un système chaotique par la décomposition de ce dernier, alors on peut synchroniser ce système avec un autre système identique. Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques chaotiques de dimension  $n$ , et qu'ils sont identiques et présentés par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ \dot{Y} = f(Y) \end{cases}$$

l'un des deux systèmes est le maître et l'autre l'esclave. L'idée de cette méthode est de décomposer le système maître en deux sous systèmes comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Avec  $x_1 \in \mathbb{R}^d$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $d + m = n$  et  $x = (x_1, x_2)$

On va considérer l'un des deux sous systèmes comme un signal transmetteur et il sera injecter dans le système esclave, alors on obtient le système suivant :

$$\dot{y} = f_2(x_1, y)$$

comme système esclave ou récepteur, avec  $x_1$  est le signal transmetteur.

### 3.3.4 La synchronisation généralisée

Dans le concept de la synchronisation identique sous l'effet d'accouplement unidirectionnel il a été indiqué que le système récepteur est identique ou presque identique au système émetteur. Cependant, on va essayer d'imaginer la situation pratique intéressante où le système récepteur est différent du système émetteur. En général, quand il existe une différence essentielle entre les systèmes couplés, on ne peut pas être sûr du premier coup d'œil d'affirmer que les systèmes chaotiques non identiques peuvent être synchronisés, mais plusieurs travaux ont démontré que ce type de synchronisation chaotique peut exister en généralisant le concept de la synchronisation pour inclure la non identification entre les systèmes couplés, et on a appelé ce phénomène **la synchronisation généralisée**.

Nous avons souvent besoin de discuter le comportement cohérent des systèmes dynamiquement strictement différents (y compris les systèmes unidimensionnels différents), en particulier les systèmes en sciences biologiques et sciences sociales. Par exemple, nous pouvons observer que les deux systèmes circulatoires et respiratoires se comportent de façon synchrone, mais leurs modèles sont essentiellement différents et ils ont des dimensions différentes. Ainsi, la recherche théorique de la synchronisation des systèmes dynamiques fins strictement différents est très importante. Alors que ce type de recherche est juste en début. Au meilleur de notre connaissance, il n'existe que peu de résultats théoriques sur la synchronisation généralisée des systèmes dynamiques chaotiques de différentes dimensions. Dans cette travail, nous proposons deux approches, pour réaliser la synchronisation généralisée entre deux systèmes dynamiques chaotiques.

### La première approche : synchronisation projective généralisée

Connue par l'abréviation en caractères GPS (Generalised projective synchronisation) que nous allons étudier dans le paragraphe suivant. La deuxième approche est un sujet principal du prochain chapitre. Pour définir la synchronisation généralisée (GS) pour un schéma de couplage unidirectionnel considérons le système couplé suivant :

$$\dot{x} = F(x) \quad (3.23)$$

$$\dot{y} = G(y, h_\mu(x)) \quad (3.24)$$

où  $x$  est le vecteur d'état du système maître de dimension  $n$  et  $y$  est le vecteur d'état du système esclave de dimension  $m$ .  $F$  et  $G$  sont des champs de vecteurs,  $F : R^n \rightarrow R^n$  et  $G : R^m \rightarrow R^m$ , où la dépendance de cette fonction sur les paramètres  $\mu$  est explicitement considérée. Lorsque  $\mu = 0$ , le système récepteur évolue indépendamment d'émetteur, et nous supposons que les deux systèmes sont chaotiques.

Lorsque  $\mu \neq 0$ , les trajectoires chaotiques des deux systèmes sont dits synchronisées dans un sens généralisé s'il existe une transformation  $\psi : x \rightarrow y$  qui est capable d'appliquer asymptotiquement des trajectoires de l'attracteur du système émetteur dans celles de l'attracteur du système récepteur  $y(t) = \psi(x(t))$ , indépendamment des conditions initiales dans le bassin de la tubulure de synchronisation

$$M = \{(x, y) : y = \psi(x)\}.$$

Pour définir la synchronisation généralisée pour deux systèmes chaotiques couplés unidirectionnellement, on va travailler avec des systèmes non-linéaires composés d'un système émetteur autonome avec les variables dynamiques  $x$  dans un espace de phase  $X$  couplé à un système récepteur avec des variables dynamiques  $y$  dans l'espace d'état  $Y$ . La dynamique des systèmes émetteur et récepteur est donnée par :

$$\dot{x} = F(x(t)) \quad (3.25)$$

$$\dot{y} = G(y(t), g, x(t)) \quad (3.26)$$

Avec  $g$  une constante qui caractérise la force d'accouplement unidirectionnel.

### La deuxième approche : la synchronisation par La méthode du système auxiliaire approché

Cette méthode est basé sur le fait que si le même système émetteur  $x(t)$  conduit deux systèmes récepteurs identiques  $y(t)$  et  $z(t)$  qui commencent par des conditions initiales différentes.

La stabilité de la synchronisation dans l'espace  $X \oplus Y$ , qui peut en général avoir une forme très compliquée  $y(t) = \phi(x(t))$ , peut être remplacée par l'analyse de la stabilité tout à fait simple  $z(t) = y(t)$  dans l'espace  $Z \oplus Y$ . Alors nous supposons les systèmes maître, esclave et auxiliaire suivants :

$$\dot{x}_1 = F(x(t)) \quad (3.27)$$

$$\dot{y}_2 = G(y(t), g, x(t)) \quad (3.28)$$

$$\dot{z}_3 = G(z(t), g, x(t)) \quad (3.29)$$

Le dernier système (3.29) est identique au système récepteur (3.28). le système récepteur et son auxiliaire ont le même signal émetteur  $x(t)$ , alors les champs vectoriels dans les espaces de phase du récepteur et du système auxiliaire sont identiques et les deux systèmes peuvent se développer sur des attracteurs identiques. La stabilité linéaire de la variété  $z(t) = y(t)$  est équivalente à celle de variété des mouvements synchronisés dans  $X \oplus Y$ .

### 3.3.5 La synchronisation de phase

Un cas fréquemment étudié dans la littérature est quand une force périodique externe faible est appliquée à un système chaotique autonome, cette situation peut être décrite par un système d'équations différentielles d'ordre  $n$  suivant :

$$\dot{x} = f(x) + p(t) \quad (3.30)$$

avec  $p(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1), A_2 \cos(\omega t + \delta_2), \dots, A_n \cos(\omega t + \delta_n)$  la force périodique appliquée de fréquence  $\omega$  dont l'intensité est mesurée par l'amplitude  $A_i, i = 1 \dots, n$ . Dans ces circonstances il est possible d'observer le phénomène connu comme **la synchronisation de phase**. [12] Cela signifie que le système reste chaotique mais sa dynamique est modifiée d'une telle façon que la phase de l'attracteur chaotique rencontre celui de la force appliquée. La présence de synchronisation de phase d'un système chaotique à une force agissante de fréquence  $\omega$  est représentée par la relation suivante :

$$\psi(t) = \phi(t) \pm \frac{m}{n} \omega t \quad (3.31)$$

avec  $m$  et  $n$  des nombres entiers, comme le cas quand il y a deux (nombres) réels,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , qui vérifient  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 < 2\pi$ , tel que  $\varepsilon_1 < \psi(t) < \varepsilon_2$  pour tout  $t$ ,  $\phi(t)$  représente la phase de l'oscillateur chaotique et  $\Psi(t)$  la différence entre la phase de l'oscillateur chaotique et celle de la force agissante. Cette condition peut être réécrite, comme :

$$|n\Omega - m\omega| = 0 \quad (3.32)$$

Pour que la synchronisation de phase signifie que la phase de l'oscillateur reste toujours assez près de la phase de la force ( $m = n = 1$ ), ou à une de ses harmoniques ( $m > n$ ), ou bien la fréquence de l'oscillateur  $\Omega$  est près d'une harmonie de la fréquence de la force ( $m < n$ ). La synchronisation de phase peut être obtenue ou non, selon les propriétés de la force appliquée : sa fréquence  $\psi$ , amplitude  $A_i$  et les angles  $\delta_i, i = 1 \dots n$ , à cause des approches différentes à la phase de l'oscillateur présenté dans la subdivision précédente, la synchronisation de phase peut être contrôlée de plusieurs façons.

### 3.3.6 Synchronisation de retard

Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un retard de temps de l'un par rapport à l'autre, ils ont appelé ce phénomène **la synchronisation de retard**.

A cet effet, considérons deux systèmes chaotiques légèrement différents  $\dot{x}_1 = F_1(x_1)$  et  $\dot{x}_2 = F_2(x_2)$ , accrochés par un accouplement unidirectionnel défini par la force d'accouplement  $\varepsilon$  donc on dit que  $x_1(t)$  soit synchronisée avec  $x_2(t + \tau)$  dans une gamme de valeurs de  $\varepsilon$ , où  $\tau \neq 0$  est le retard de temps qui dépend beaucoup plus de  $\varepsilon$  du paramètre caractérisant la différence entre les deux oscillateurs. Pour évaluer quantitativement la synchronisation de retard, nous utilisons la fonction de similitude suivante définie en ce qui concerne une variable dynamique, disons  $x$ , des oscillateurs chaotiques :

$$s(\tau) = \sqrt{\frac{\langle (x_2(t - \tau) - x_1(t))^2 \rangle}{(\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle)^{\frac{1}{2}}}} \quad (3.33)$$

où  $\tau$  est le temps de retard .

Soit  $s_{min}$  la valeur minimale de  $s(\tau)$  et soit  $\tau_{min}$  la quantité (somme) de retard où  $\tau_{min}$  est réalisé. On désigne par  $\langle \cdot \rangle$  le produit scalaire défini sur l'espace de phases. La synchronisation de retard entre les deux oscillateurs est caractérisée par les conditions

$$s_{min} = 0 \text{ et } \tau_{min} \neq 0 \quad (3.34)$$

tandis que la synchronisation complète est caractérisée par les conditions

$$s_{min} = 0 \text{ et } \tau_{min} = 0$$



# Chapitre 4

## Synchronisation de deux systèmes chaotiques différents par la méthode du système auxiliaire approché

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on propose une étude de synchronisation entre deux systèmes différents chaotiques en utilisant la méthode du système auxiliaire approché. Pour cela, on suppose le système de Chua modifié, comme système émetteur (maître), et le système de Van der Pol-Duffing modifié (MVDPD) comme système récepteur (esclave). Cette méthode est également détectée à la fois aux deux systèmes bien connus, Finance et Lorenz. Le critère de Routh-Hurwitz est utilisé pour l'étude de la stabilité du système d'erreur entre les systèmes maître-esclave. Les résultats numériques montrent l'efficacité de l'analyse théorique.

#### 4.1.1 Description du système

##### 1-système de Van der-Pol-Duffing modifié(MVDPD)

Le système est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = m(y_2 - x_2^3 + \lambda x_2 + \mu) \\ \dot{y}_2 = x_2 - y_2 - z_2 \\ \dot{z}_2 = \beta y_2 - \gamma z_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Les paramètres  $m$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont tous des réels positifs.

##### • Les points fixes

Le système (4.1) admet trois points d'équilibres qu'on les note par  $E_0(0, 0, 0)$ ,  $E_+(x_+, y_+, z_+)$  et  $E_-(x_-, y_-, z_-)$  tel que  $x_+ = \frac{1}{\beta} \frac{\beta + \gamma}{\beta^3 + \gamma^3 + 3\beta\gamma^2 + 3\beta^2\gamma} \sqrt{\Delta}$ ,

$$y_+ = \frac{1}{\beta} \frac{\gamma}{\beta^3 + \gamma^3 + 3\beta\gamma^2 + 3\beta^2\gamma} \sqrt{\Delta} \text{ et } z_+ = \frac{1}{\beta^3 + \gamma^3 + 3\beta\gamma^2 + 3\beta^2\gamma} \sqrt{\Delta}$$

avec  $\Delta = \beta^5\gamma + \beta^6\lambda + 4\beta^5\lambda\gamma + \beta^2\gamma^4 + 3\beta^3\gamma^3 + 3\beta^4\gamma^2 + \beta^2\lambda\gamma^4 + 4\beta^3\lambda\gamma^3 + 6\beta^4\lambda\gamma^2$  et  $x_-, y_-, z_-$ , sont les symétriques de  $x_+, y_+, z_+$  respectivement.

Avec les valeurs des paramètres  $\beta = 200, m = 100, \lambda = 0.1, \gamma = 0.2$  donc les points d'équilibre deviennent  $E_0(0, 0, 0), E_+(+0.3178, +3.1749 \times 10^{-4}, +0.31749)$  et  $E_-(-0.3178, -3.1749 \times 10^{-4}, -0.31749)$

Leurs valeurs propres sont données par :

Points d'équilibres	Valeurs propres
$E_0(0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 13.436, \lambda_{2, 3} = -2318 \pm 0.31749i$
$E_+(+0.3178, +3.1749 \times 10^{-4}, +0.31749)$	$\lambda_1 = -23.515, \lambda_{2, 3} = 1.0081 \pm 13.075i$
$E_-(-0.3178, -3.1749 \times 10^{-4}, -0.31749)$	$\lambda_1 = -23.515, \lambda_{2, 3} = 10081 \pm 13.075i$

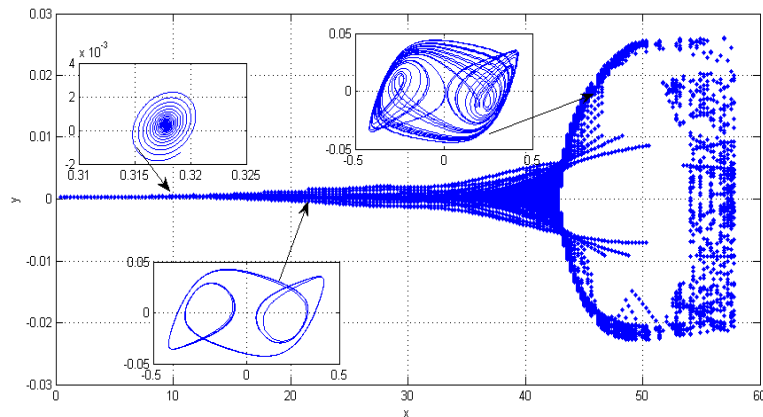


FIGURE 4.1 – Diagramme de bifurcation du système de Van der-Pol avec les portées du phase en  $m = 20, m = 90,$  et  $m = 102$ .

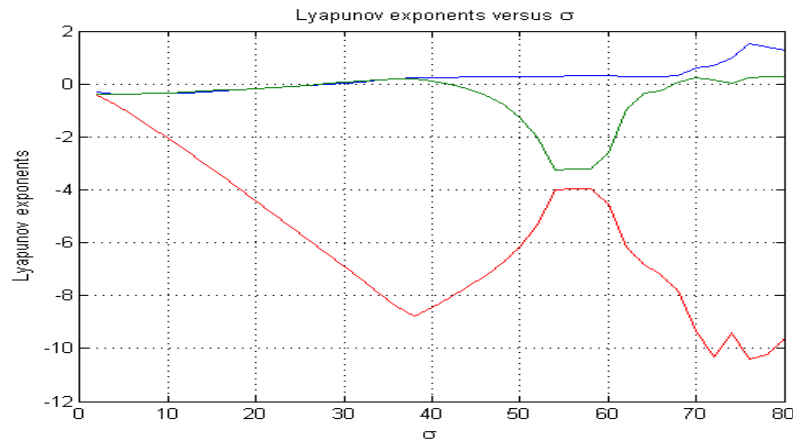


FIGURE 4.2 – exposant de Lyapounov du système de Van der-Pol.

## •2-système de Chua

Le système de Chua est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta(y - x^3 + \delta x) \\ \dot{y} = x - y - z \\ \dot{z} = \rho y \end{cases} \quad (4.2)$$

où les paramètres  $\eta$ ,  $\sigma$  et  $\delta$  sont des réels positifs.

• **Les points fixes**

Le système (4.2) a trois points d'équilibres donnés par :  $E_0(0, 0, 0)$ ,  $E_+(\sqrt{\delta}, 0, \sqrt{\delta})$  et  $E_-( -\sqrt{\delta}, 0, -\sqrt{\delta})$

Avec les valeurs des paramètres  $\eta = 10$ ,  $\sigma = 0.143$  et  $\rho = 16$  donc les points d'équilibres deviennent  $E_0(0, 0, 0)$ ,  $E_+(+0.37815, 0, +0.37815)$  et  $E_-( -0.37815, 0, -0.37815)$

Leurs valeurs propres sont données par :

Points d'équilibres	Valeurs propres
$E_0(0, 0, 0)$	$\lambda_1 = 2.4283, \lambda_{2,3} = -0.99914 \pm 2.9024i$
$E_+(+0.37815, 0, +0.37815)$	$\lambda_1 = -4.2846, \lambda_{2,3} = 0.21236 \pm 3.2611i$
$E_-( -0.37815, 0, -0.37815)$	$\lambda_1 = -4.2846, \lambda_{2,3} = 0.21236 \pm 3.2611i$

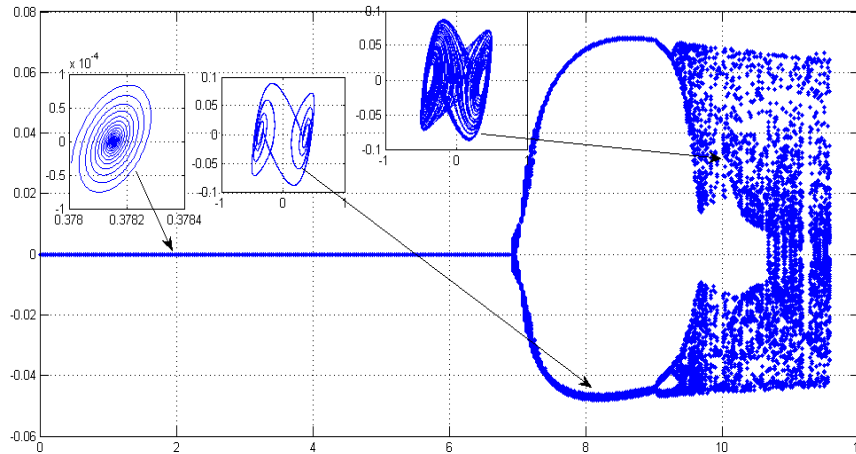


FIGURE 4.3 – Diagramme de bifurcation du système de Chua avec les portées du phase en  $\eta = 5$ , et  $\eta = 10$ , et  $\eta = 10.35$ .

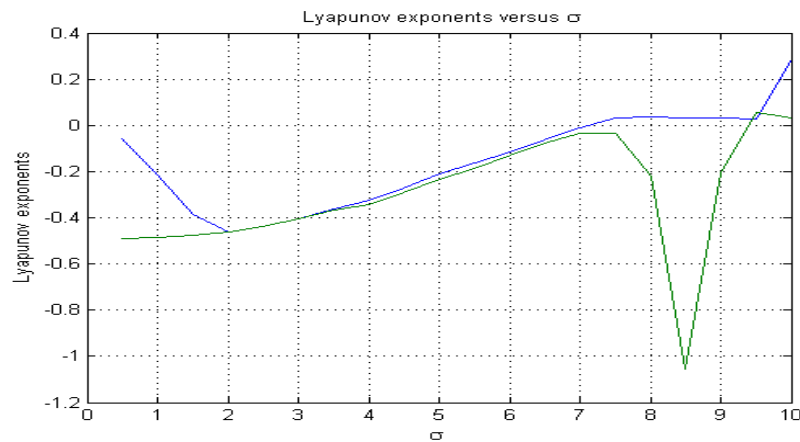


FIGURE 4.4 – Les deux grand exposant de Lyapounov du système de Chua.

### 3-Système de Lorenz

Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans ces équations  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  sont trois paramètres réels.

#### • Les points fixes

Il existe trois :

le point fixe  $E_0(0, 0, 0)$ , qui existe quelles que soient les valeurs des paramètres réels  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\beta$ .

Les deux points fixes symétriques :  $E_-(-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$  et  $E_+(\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$  qui n'existent que lorsque  $\rho > 1$ . Avec les valeurs des paramètres  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $\beta = \frac{8}{3}$

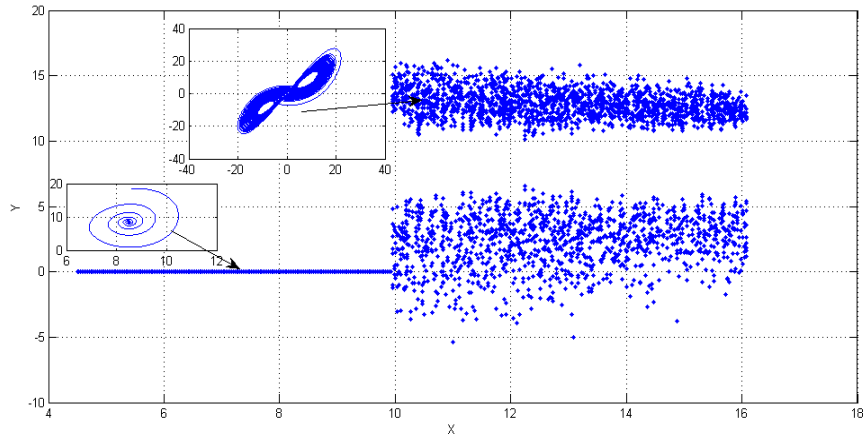


FIGURE 4.5 – Diagramme de bifurcation du système de Lorenz avec les portées du phase en  $\sigma = 2$  et  $\sigma = 10$ .

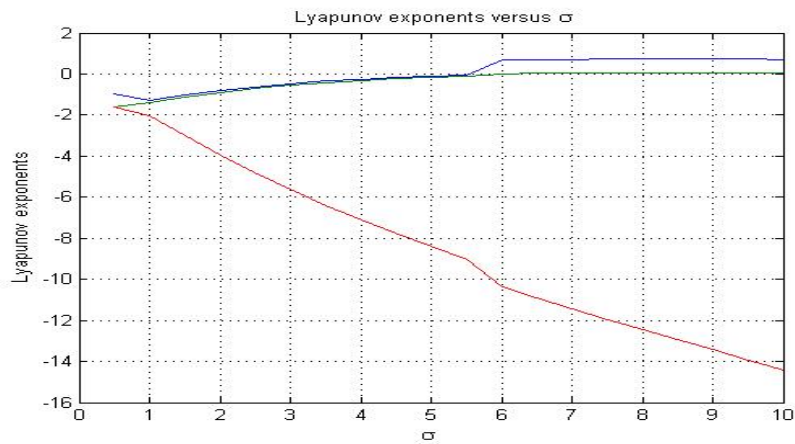


FIGURE 4.6 – exposant de Lyapounov du système de Lorenz.

#### 4-système de Finance

Le système financier est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (4.4)$$

le paramètre  $a$  représente le montant d'épargne,  $b$  le coût d'investissement, et  $c$  l'élasticité de la demande des marchés commerciaux, et ils sont des constantes positives.

##### • Les points fixes

Les points fixes sont les solutions de système :

$$\begin{cases} z + (y - a)x = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Après un simple calcul, on trouve que :

- \* si  $1 - b(a + \frac{1}{c}) \leq 0$  : on a un seul point fixe :  $p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0)$
- \* si  $1 - b(a + \frac{1}{c}) > 0$  : on a trois points fixe :

$$p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0), p_{2,3} = \left( \pm \sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}, (a + \frac{1}{c}), \pm \frac{\sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}}{c} \right)$$

On pose  $b = 0.2 = \frac{1}{5}$   $c = 1.2 = \frac{6}{5}$  et  $a \in \mathbb{R}^+$  alors :

- \* si  $a \geq \frac{25}{6}$  : on a un seul point fixe :  $p_1 = (0, 5, 0)$
- \* si  $a < \frac{25}{6}$  : il y a trois points d'équilibre :  $p_1 = (0, 5, 0)$   
 $p_{2,3} = \left( \pm \sqrt{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}a}, a + \frac{5}{6}, \pm \frac{5}{6} \sqrt{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}a} \right)$

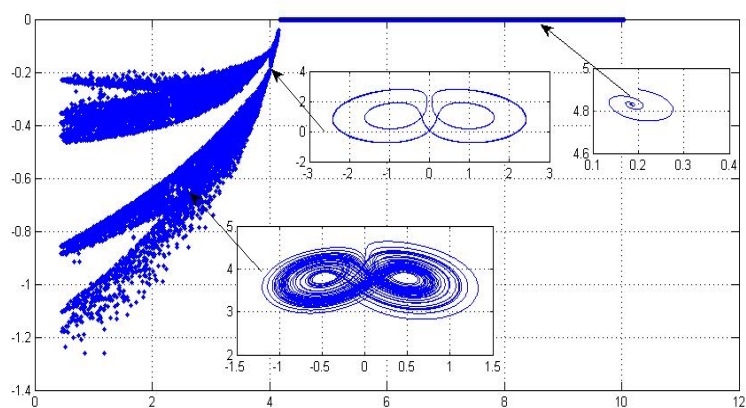


FIGURE 4.7 – Diagramme de bifurcation du système de Finance avec les portées du phase en  $a = 4.05$ ,  $a = 0.45$ , et  $a = 3$ .

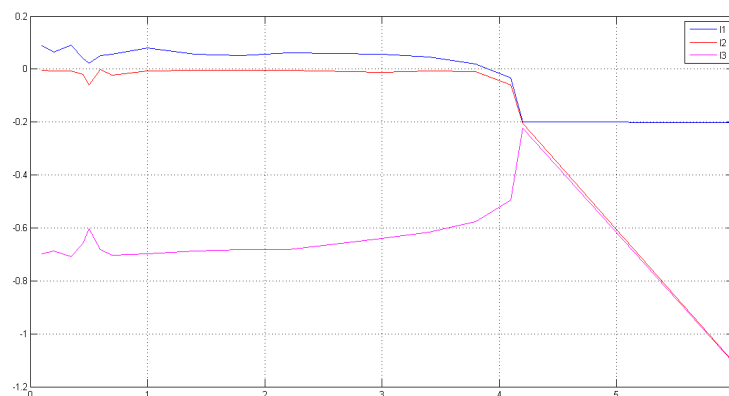


FIGURE 4.8 – L'exposant de Lyapounov du système de Finance.

## 4.2 Synchronisation entre le l'oscillateur de Chua et l'oscillateur de Van der Pol-Duffing

### 4.2.1 Analyse théorique

nous supposons le système de Chua comme émetteur (maître) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \eta(y_1 - x_1^3 + \delta x_1), \\ \dot{y}_1 = x_1 - y_1 - z_1, \\ \dot{z}_1 = \rho y_1, \end{cases} \quad (4.6)$$

et le système MAVPD comme récepteur (esclave).

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = m(y_2 - x_2^3 + \lambda x_2 + \mu) - k(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_2 = x_2 - y_2 - z_2, \\ \dot{z}_2 = \beta y_2 - \gamma z_2, \end{cases} \quad (4.7)$$

On choisit un système auxiliaire, qui est identique au système esclave (4.7) (avec des conditions initiales différentes).

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = m(y_3 - x_3^3 + \lambda x_3 + \mu) - k(x_3 - x_1), \\ \dot{y}_3 = x_3 - y_3 - z_3, \\ \dot{z}_3 = \beta y_3 - \gamma z_3, \end{cases} \quad (4.8)$$

La soustraction des deux systèmes (4.7) et (4.8), nous donne le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (m\lambda - k)e_1 + me_2 - m(x_3^3 - x_2^3), \\ \dot{e}_2 = e_1 - e_2 - e_3, \\ \dot{e}_3 = \beta e_2 - \gamma e_3, \end{cases} \quad (4.9)$$

où  $e_1 = x_3 - x_2$ ,  $e_2 = y_3 - y_2$ ,  $e_3 = z_3 - z_2$ . Le système (4.9) peut être écrit sous forme matricielle comme le suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \varphi(x, y, z) \quad (4.10)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} m\lambda - K & m & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \beta & -\gamma \end{pmatrix}$$

et

$$\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} -m(x_3^3 - x_2^3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est une fonction non linéaire satisfait la condition de Lipschitz, donc au voisinage de zéro, elle converge vers zéro. Pour étudier la stabilité du système (4.10), nous utilisons les conditions de critère de Routh-Hurwitz généralisée.

**Proposition 4.1** (12). *Supposons que  $\gamma < 1$ ,  $m > (\gamma + 1)(\gamma - 1 + 2\sqrt{\beta})$  et que*

$$k \geq \frac{m(\gamma + \lambda\beta + \lambda\gamma)}{\beta + \gamma},$$

*Si le paramètre  $k$  satisfait*

$$k = \frac{1}{2\gamma + 2}(m - 2\gamma + 2m\lambda - \gamma^2 + 2m\lambda\gamma - 1 + \sqrt{\Delta})$$

*ou*

$$k = \frac{1}{2\gamma + 2}(m - 2\gamma + 2m\lambda - \gamma^2 + 2m\lambda\gamma - 1 - \sqrt{\Delta})$$

*avec*

$$\Delta = 2m - 4\beta - 2\gamma^2 + \gamma^4 - 8\beta\gamma - 2m\gamma^2 - 4\beta\gamma^2 + m^2 + 1,$$

**Preuve** (12). *On reprend le système (4.10). Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est donné par :*

$$P(x) = x^3 + (k + \gamma - m\lambda + 1)x^2 + (k - m + \beta - m\lambda + \gamma(k - m\lambda + 1))x + k\beta + k\gamma - m\gamma - m\beta\lambda - \lambda\gamma.$$

*En appliquant les conditions de stabilité de Routh-Hurwitz . On remarque avec un simple calcul que si  $a_3 > 0$ , alors on a aussi  $a_2 > 0$  et  $a_1 > 0$ ,*

*avec  $a_1 = (k + \gamma - m\lambda + 1)$ ,  $a_2 = (k - m + \beta - m\lambda + \gamma(k - m\lambda + 1))$  et  $a_3 = k\beta + k\gamma - m\gamma - m\beta\lambda - \lambda\gamma$ . La condition  $a_1 * a_2 - a_3 = 0$  équivaut à résoudre l'équation de variable  $k$  suivante.*

$$(1 + \gamma)k^2 + (1 + 2\gamma + \gamma^2 - m - 2m\lambda - 2m\lambda\gamma)k - m + \beta + \gamma + m^2\lambda^2 - m\lambda + \gamma^2 + \beta\gamma + m^2\lambda + m^2\lambda^2\gamma - 2m\lambda\gamma - m\lambda\gamma^2$$

*ce qui nous donne*

$$k = \frac{1}{2\gamma + 2}(m - 2\gamma + 2m\lambda - \gamma^2 + 2m\lambda\gamma - 1 + \sqrt{\Delta})$$

*où*

$$\Delta = 2m - 4\beta - 2\gamma^2 + \gamma^4 - 8\beta\gamma - 2m\gamma^2 - 4\beta\gamma^2 + m^2 + 1,$$

## 4.2.2 Simulation numérique

Les systèmes (4.6) et (4.7) sont intégrés numériquement avec les valeurs des paramètres  $\eta = 10$ ,  $\sigma = 0.143$  et  $\rho = 16$  pour le système (4.6),  $\beta = 200$ ,  $m = 100$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\gamma = 0.2$  pour le système (4.7) . En sélectionnant le paramètre de control  $k = 90.685$ .  $a_1 = 81.885$ ,  $a_2 = 197.02$ ,  $a_3 = 16133$  Les conditions initiales qu'ont prises pour le système émetteur sont : (0.05, 0.05, 0.05) tandis que pour les systèmes récepteur et auxiliaire sont respectivement : (0.02, 0.01, 0.03), (0.04, 0.06, 0.05). Le figures.FIG.4.9 montre que la synchronisation, au sens généralisé, entre les deux systèmes (4.6) et (4.7) est achevée



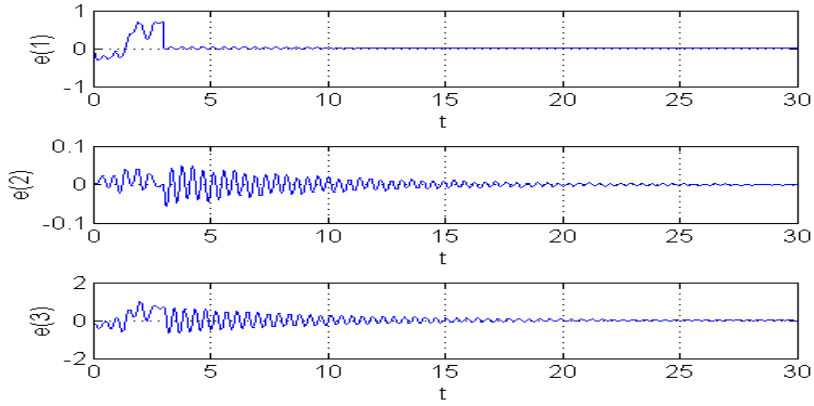


FIGURE 4.9 – Synchronisation entre le l'oscillateur de Chua et l'oscillateur de Van der Pol

### 4.3 Deuxième application :Synchronisation entre le système de Finance et celui de Lorenz

#### 4.3.1 Analyse théorique

Nous supposons le système de Finance comme émetteur (maître) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = z_1 + (y_1 - a)x_1 \\ \dot{y}_1 = 1 - by_1 - x_1^2 \\ \dot{z}_1 = -x_1 - cz_1 \end{cases} \quad (4.11)$$

et système de Lorenz comme esclave(récepteur) :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) - k_1(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_2 = \rho x_2 - y_2 - x_2 z_2 - k_2(y_2 - y_1), \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 - k_3(z_2 - z_1), \end{cases} \quad (4.12)$$

On choisit un système auxiliaire, qui est identique au système esclave (4.12) (avec des conditions initiales différentes).

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \sigma(y_3 - x_3) - k_1(x_3 - x_1), \\ \dot{y}_3 = \rho x_3 - y_3 - x_3 z_3 - k_2(y_3 - y_1), \\ \dot{z}_3 = x_3 y_3 - \beta z_3 - k_3(z_3 - z_1), \end{cases} \quad (4.13)$$

La soustraction des deux systèmes (4.12) et (4.13), nous donne le système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \sigma(e_2 - e_1) - k_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = \rho e_1 - (k_2 - 1)e_2 - x_3 z_3 + x_2 z_2, \\ \dot{e}_3 = (-\beta - k_3)e_3 + x_3 y_3 - x_2 y_2, \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $e_1 = x_3 - x_2$ ,  $e_2 = y_3 - y_2$ ,  $e_3 = z_3 - z_2$ . Le système (4.14) peut être écrit sous forme matricielle comme le suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \varphi(x, y, z) \quad (4.15)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \sigma - K_1 & \sigma & 0 \\ \rho & -k_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - k_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 z_3 + x_2 z_2 \\ x_3 y_3 - x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

est une fonction non linéaire satisfait la condition de Lipschitz, donc au voisinage de zéro, elle converge vers zéro. Pour étudier la stabilité du système (4.15), nous utilisons les conditions de critère de Routh-Hurwitz généralisée. Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par :

$$P(x) = x^3 + (\sigma + \beta + 3K)x^2 + ((\beta + k)(\sigma + 2k + 1) + (k + 1)(\sigma + k) - \sigma\rho)x + ((k + 1)(\sigma + k) - \sigma\rho)(\beta + k)$$

Alors notons par :

$$a_1 = \sigma + \beta + 3$$

$$a_2 = (\beta + k)(\sigma + 2k + 1) + (k + 1)(\sigma + k) - \sigma\rho$$

$$a_3 = (k + 1)(\sigma + k) - \sigma\rho)(\beta + k)$$

### 4.3.2 Simulation numérique

Les systèmes couplés (4.11) et (4.12) sont intégrés numériquement avec les valeurs des paramètres  $(a, b, c) = (10, 0.2, 1.2)$ , pour le système (4.11), et  $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, \frac{8}{3})$  pour le système (4.12)

En sélectionnant les paramètres "feedback control"  $k = 24$ .

On a :  $a_1 = 85.66$ ,  $a_2 = 15196.2$ ,  $a_3 = 2142.9$  et  $a_1 a_2 - a_3 = 1299563.59$ .

Les conditions initiales qu'ont prises sont :  $(0.02, 0.01, -0.01)$  pour le système émetteur  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 2, 1)$  pour les systèmes récepteur et auxiliaire respectivement. La figure FIG.4.10 montre que la synchronisation, au sens généralisé, est achevée entre les deux systèmes(4.11) et (4.12)

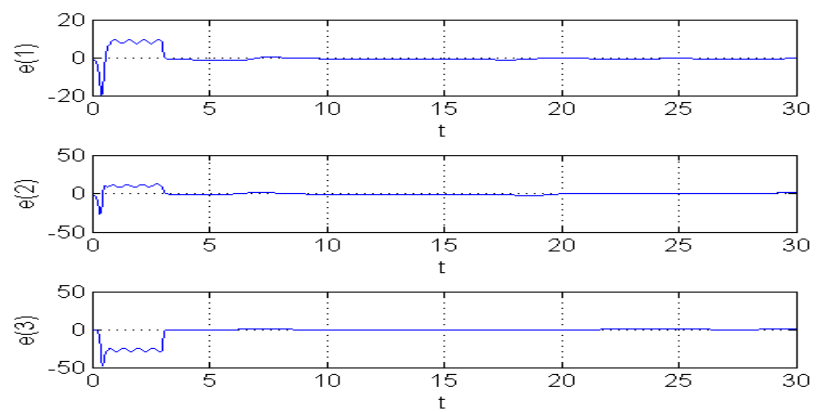


FIGURE 4.10 – Synchronisation entre le l'oscillateur de Finance et l'oscillateur de Lorenz

# Conclusion Générale

Le but de ce mémoire est l'étude de synchronisation des systèmes chaotiques au temps continu.

Pour atteindre l'objectif de cet étude nous avons divisé notre travail en quatre chapitres :

Dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (généralités sur les systèmes dynamiques et théorie du chaos), et le troisième chapitre est dédié à la théorie de la synchronisation où nous avons donné une série de définitions qui conduisent à une définition mathématique de la synchronisation, Ensuite nous avons présenté des différents types de la synchronisation .

Le dernier chapitre comprend une application où nous avons choisi deux systèmes différents le premier est le système de Van der Pol modifié et le deuxième est celui de Chua modifié. et comme deuxième exemple les deux systèmes bien connu de Finance et celui de Lorenz.

# Annexe

Dans cette partie, nous introduisons la résolutions numériques des équations différentielles. et les algorithmes en Matlab.

## Résolutions Numériques des équations différentielles :

Nous considérons une équation différentielle résolue du premier ordre. C'est-à-dire le problème :

$$x^* = f(x, t)$$

où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n \times R \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $x \in R \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

C'est, comme la méthode d'Euler, une méthode pas à pas permettant de calculer une valeur approchée de  $x(t+h)$  à partir de celle de  $x(t)$ . La formule d'itération est plus compliquée que celle de la méthode d'Euler mais l'approximation est meilleure pour une même valeur du pas. Elle s'applique aux systèmes de même type que ceux étudiés par la méthode d'Euler :

$$x^* = f(t, x(t))$$

Les formules d'itération sont les suivantes :

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)$$

avec :

$$\begin{aligned} p_1 &= f(t, x(t)) \\ p_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}p_1\right) \\ p_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}p_2\right) \\ p_4 &= f\left(t + h, x(t) + hp_3\right) \end{aligned}$$

Il y a donc quatre quantités intermédiaires à calculer ( $p_1, p_2, p_3, p_4$ ) pour obtenir  $x(t+h)$ . On calcule  $x(t+h)$  en fonction de  $x(t)$  à. Et on la nomme RK4 ( $f, x, t, h, n$ ) et s'emploie exactement comme Euler ( $f, x, t, h, n$ ). A chaque appel, les valeurs de  $x(t)$ , contenues dans le tableau  $x$ , sont remplacées par les valeurs de  $x(t, h)$ ,  $f$  étant la fonction qui définit le système différentiel.

## Le diagramme de bifurcation pour le système de Chua

```

clear all;
close all;
clc;
T = 300; a = 0;
b = 0.143;
s = 16;
jj = 1;
for j = 1 : 400
x(1) = 0.02;
y(1) = 0.01;
z(1) = -0.01;
N = 11000;
h = T/N;
t = 0 : h : T;
if(a < 6.93)

    yy(jj)=0;
zz(jj)= sqrt(b);
aa(jj)=a;
jj=jj+1;
else
for i=1 :N
k1=h*(a*(y(i)-x(i)^3) + b * x(i));
l1 = h * (x(i) - y(i) - z(i));
p1 = h * (s * y(i));
k2 = h * (a * ((y(i) + l1/2) - (x(i) + k1/2))^3) + b * (x(i) + k1/2));
l2 = h * ((x(i) + k1/2) - (y(i) + l1/2) - (z(i) + p1/2));
p2 = h * s * (y(i) + l1/2);
k3 = h * (a * ((y(i) + l2/2) - (x(i) + k2/2))^3) + b * (x(i) + k2/2));
l3 = h * ((x(i) + k2/2) - (y(i) + l2/2) - (z(i) + p2/2));
p3 = h * s * ((y(i) + l2/2));
k4 = h * (a * ((y(i) + l3/2) - (x(i) + k3/2))^3) + b * (x(i) + k3/2));
l4 = h * ((x(i) + k3/2) - (y(i) + l3/2) - (z(i) + p3/2));
p4 = h * s * ((y(i) + l3/2));
x(i + 1) = x(i) + (1/6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
y(i + 1) = y(i) + (1/6) * (l1 + 2 * l2 + 2 * l3 + l4);
z(i + 1) = z(i) + (1/6) * (p1 + 2 * p2 + 2 * p3 + p4);
if(i > 3000)
if(abs(x(i + 1) - sqrt(b)) < 0.002)
yy(jj) = y(i);
zz(jj) = z(i);
aa(jj) = a;
jj = jj + 1;
end
end
end

```

```
end
end
a = a + 0.029;
end
figure(3)
plot(x, y); grid on
figure(1)
plot(aa, yy, '.'); grid on
figure(2)
plot(aa, zz, '.'); grid on
```

# Bibliographie

- [1] **A.S.**, On the interaction of strange attractors. *Physik B*, 55, n.2, pp. 149 - 154, (1984).
- [2] **C. W. Wu and L. O. Chua**, A unified framework for synchronization and control of dynamical systems, *Int. J. Bifurc. Chaos*, (1994).
- [3] **E. Cherrier**, Estimation de l'état des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires, Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine, (2006).
- [4] **I.I. Blekhnman, A.L. Fradkov**, H. Nijmeijer, A.Yu. Pogromsky, On self-synchronization and controlled synchronization, *Systems Control Lett.* vol. 31 pp. 299-305, (1997).
- [5] **I. Ellouze**, Étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs. Mémoire pour l'obtention du Doctorat de l'université Paul Verlaine de Metz et de l'université de Sfax. 15 décembre 2010.
- [6] **King GP**, Gaito ST. Bistable chaos. I. Unfolding the cusp. *Phys*, (1992)
- [7] **K. Pyragas**, Weak and strong, synchronization of chaos, *Phys*, (1996).
- [8] **L. M. Pecora and T. L. Carroll**, "Driving Systems with Chaotic Signals," *Phys. Rev.* August (1991).
- [9] **L. M. Pecora and T. L. Carroll**, Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* 64, 821, (1990).
- [10] **Marc. Chaperon**, Calcul différentiel et calcul intégrale 3e année, Dunod, paris, (2008).
- [11] **R. Brown and L. Kocarev**, A unifying definition of synchronization for dynamical systems, *CHAOS*, JUN (2000).
- [12] **Tidjani Menacer**, Synchronisation des systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, Thèse, Constantine, (2014).
- [13] **Zeraoulia Elhadj**, Etude de quelques types de systèmes chaotiques : Généralisation d'un modèle issu du modèle de chen, Thèse, Constantine, février, (2006).



# Résumé

Dans ce mémoire, nous avons parlé de certains des concepts pour l'étude du système dynamique continue, (Stabilité, points d'équilibre, bifurcations, chaos, les exposants de Lyapunov), et comme une application de ces concepts nous avons étudié quatre systèmes chaotiques.

La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue suivant le comportement de l'autre. En mathématiques la synchronisation de deux systèmes consiste à rapprocher leurs trajectoires jusqu'à ce qu'elles finissent par être confondues, sous l'effet d'une force d'accouplement exercée sur les deux systèmes.

## **Mots-clés**

Systemes Dynamiques, Chaos, Systemes chaotiques, Accouplement unidirectionnel, Synchronisation, Synchronisation identique, Synchronisation généralisée.

# Abstract

In this thesis, we talked about some concepts for the study of continuous dynamic system, (Stability, equilibrium points, bifurcations, chaos, Lyapunov exponent), as application of these concepts we studied for chaotic systems.

The synchronization of two dynamic systems means that each system evolves following the behavior of the other. In mathematics, synchronizing two systems is to bring their trajectories until they end up being together, under the effect of a coupling power exerted on the two systems.

**key words**

Dynamical Systems, Chaos, chaotic systems, Coupling unidirectional, Synchronization, Identical synchronization, Generalized synchronization.

## ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى بعض المفاهيم لدراسة نظام ديناميكي مستمر (الاستقرار نقاط التوازن التشعبات الفوضى اسس لياينوف) وكتطبيق درسنا أربع أنظمة فوضوية. تزامن اثنين من الأنظمة الدنامكة يعني أن كل نظام يتطور حسب سلوك الآخر. في الرياضات تزامن. نظامين يعني تقريبا مساريهما حتى التطابق في نهاية المطاف، تحت تأثير قوة اقتران تمارس على النظامين.