

François **Cottet-Emard**

Analyse **2**

Calcul différentiel, intégrales multiples,
séries de Fourier

**COURS
ET EXERCICES CORRIGÉS**

Licence de mathématiques, L2



de boeck

Table des matières

Avant-propos.....	III
-------------------	-----

Chapitre 1 Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Continuité

1. Rappels de topologie	3
1.1 Distance dans \mathbb{R}^n	3
1.2 Convergence d'une suite de points dans \mathbb{R}^n	4
1.3 Théorème de Bolzano-Weierstraß	4
1.4 Boule ouverte	5
1.5 Voisinage d'un point	5
1.6 Ouvert	5
1.7 Fermé	6
1.8 Compact.....	7
1.9 Rien du tout.....	8
1.10 Connexité	8
2. Fonction réelle de plusieurs variables	9
3. Limite en un point x_0	10
3.1 Définition	10
3.2 Théorèmes généraux.....	14
4. Continuité en un point x_0	15
4.1 Définition et propriétés générales	16
4.2 Un cas particulier de fonction composée.....	17
4.3 Prolongement par continuité.....	18
4.4 Continuité et suites de points.....	18
4.5 Un deuxième cas particulier de composition de fonctions.....	19
4.6 Fonction continue sur une partie D de \mathbb{R}^n	19
5. Image d'un compact par une fonction continue	20
5.1 Théorème.....	20
5.2 Application fondamentale: théorème de la borne atteinte	21

5.3	Théorème de Heine.....	22
6.	Théorème des valeurs intermédiaires généralisé.....	23
7.	Caractérisation des fonctions continues sur \mathbb{R}^n	24

Chapitre 2 Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Différentiabilité

1.	Dérivées partielles.....	28
1.1	Rappel.....	28
1.2	Dérivées partielles en un point $a \in \mathbb{R}^n$	28
1.3	Interprétation géométrique en dimension 2.....	29
1.4	Exemples de calculs.....	30
2.	Développement limité à l'ordre 1. Approche de la notion de différentielle	31
3.	Fonction différentiable en un point; différentielle.....	33
4.	Fonction de classe C^1 sur un ouvert. Condition suffisante de différentiabilité	34
4.1	Définition et exemples.....	34
4.2	Une condition suffisante de différentiabilité.....	36
4.3	Autre notation de la différentielle.....	38
5.	Interprétation géométrique.....	40
5.1	Plan tangent.....	41
5.2	Vecteur gradient.....	43
5.3	Dérivée suivant une direction.....	44
6.	Théorème des accroissements finis.....	46
6.1	Dérivation de la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a+t\vec{u})$	47
6.2	Théorème des accroissements finis.....	48
6.3	Interprétation géométrique.....	49
6.4	Inégalité des accroissements finis.....	50
7.	Première approche de la dérivation des fonctions composées.....	50
7.1	Dérivée de $t \in \mathbb{R} \mapsto f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$	50
7.2	Applications: lignes de niveau d'une surface, lignes de plus grande pente.....	52
8.	Deuxième approche de la dérivation des fonctions composées. Cas de \mathbb{R}^2	54
8.1	Principe et résultat.....	54
8.2	Énoncé du théorème en dimension 2.....	56
8.3	Techniques de calculs.....	56
9.	Quelques équations élémentaires aux dérivées partielles.....	59

Chapitre 3 Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Dérivées d'ordre supérieur – Formule de Taylor

1. Dérivées partielles d'ordre 2	62
1.1 Présentation du problème. Notations.....	62
1.2 Quelques exemples.....	63
2. Fonction de classe C^2. Lemme de Schwarz	66
2.1 Fonction de classe C^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^n	66
2.2 Lemme de Schwarz.....	67
2.3 Conséquences en dimension 2 et 3.....	69
3. Formule de Taylor à l'ordre deux	70
3.1 Dérivées successives de $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a+t\vec{u})$	70
3.2 Forme quadratique associée à $F''(t)$	71
3.3 Formule de Taylor à l'ordre deux.....	71
3.4 Écriture en dimension $n=2$	72
3.5 Formule de Taylor version développement limité à l'ordre 2.....	73
4. Formule de Taylor à un ordre quelconque	75
4.1 Notation symbolique très pratique.....	76
4.2 Dérivée d'ordre n de la fonction $t \mapsto F(t)=f(x_0+th, y_0+tk)$	76
4.3 Formule de Taylor à l'ordre n	76
4.4 Développement limité à l'ordre n	77

Chapitre 4 Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Extrema

1. Principes généraux	80
1.1 Rappels.....	80
1.2 Définitions: extrema locaux.....	81
1.3 Point critique.....	82
1.4 Condition nécessaire d'extremum local.....	83
1.5 Où chercher les extrema locaux?.....	84
2. Extremum en un point critique. Étude détaillée	85
2.1 Position du problème et notation.....	85
2.2 Rappel sur les formes quadratiques.....	85
2.3 Une condition suffisante d'extremum local.....	86
2.4 Autre cas.....	87
3. Cas de la dimension deux	88
3.1 CNS pour que H soit définie positive.....	89
3.2 Représentation géométrique.....	89
3.3 Exemples.....	92

4. Exemples en dimension trois	98
5. Des montagnes $z=f(x, y)$ et leurs extrema	100

Chapitre 5 Applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

1. Généralités. Continuité.....	106
1.1 Présentation du problème. Notations	106
1.2 Continuité.....	106
1.3 Homéomorphisme.....	108
2. Différentielle d'une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p	109
2.1 Définition. Matrice Jacobienne de f en a	109
2.2 Fonction de classe C^1 sur un ouvert U	111
2.3 Exemples. Calculs de Jacobiens	112
3. Différentielle d'une application composée.....	114
4. Inégalité des accroissements finis.....	119
5. Difféomorphisme	120
6. Équations aux dérivées partielles	122
6.1 Quelques exemples.....	122
6.2 Résolution de l'équation $a\partial_t u(t, x) + b\partial_x u(t, x) = 0$	122
6.3 Équation des ondes.....	123
6.4 Équation des ondes avec conditions initiales.....	124

Chapitre 6 Théorème des fonctions implicites dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

1. Introduction	126
2. Théorème des fonctions implicites dans \mathbb{R}^2	126
3. Théorème des fonctions implicites dans \mathbb{R}^3	131

Chapitre 7 Exercices sur les chapitres 1 à 6

1. Continuité	134
2. Calcul différentiel.....	143
3. Formule de Taylor, extrema.....	156
4. Composition. Changement de variables.....	168
5. Changement de variables et E.D.P.....	177
6. Exercices théoriques	187

7.	Accroissements finis	191
8.	Fonctions implicites	193
9.	Applications pratiques. Approximations	197

Chapitre 8 Séries de Fourier

1.	Quelques formules de trigonométrie.....	207
2.	Fonctions continues ou C^k par morceaux	208
2.1	Fonction continue par morceaux	208
2.2	Fonction C^1 par morceaux	208
2.3	Fonction C^k par morceaux	208
2.4	Fonction 2π -périodique continue sur \mathbb{R}	209
2.5	Fonction 2π -périodique de classe C^1	210
3.	Un peu d'algèbre euclidienne	211
4.	Lemmes techniques fondamentaux	212
5.	Analyse du problème	215
6.	Définition et théorème de Dirichlet.....	217
7.	Exemples de séries de Fourier. Quelques jolies sommes	221
8.	Inégalité de Bessel.....	227
9.	Série de Fourier d'une fonction continue sur \mathbb{R} et C^1 par morceaux.....	228
9.1	Coefficients de Fourier de f et de f'	228
9.2	Convergence normale.....	229
10.	La taille des coefficients de Fourier et la régularité de la fonction	231
11.	Formule de Parseval.....	233
12.	L'approche complexe des séries de Fourier	234
12.1	Fonctions de période 2π	234
12.2	Fonctions de période T quelconque	236
13.	Quelques représentations graphiques	237
14.	L'équation de la chaleur	242
Exercices.....		247

Chapitre 9 Integrales multiples

1.	Intégrale d'une fonction continue sur un segment.....	274
----	---	-----

1.1	Lemme de continuité uniforme.....	274
1.2	Subdivision de $[a,b]$ et sommes de Darboux	275
1.3	Intégrale d'une fonction continue f sur le segment $[a,b]$	277
1.4	Cohérence avec le résultat du cours de première année	278
2.	Intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle	279
2.1	Principe de l'intégrale double	280
2.2	Définition de l'intégrale double sur un rectangle	281
2.3	Autre définition de l'intégrale double sur un rectangle	282
3.	Théorème de Fubini sur un rectangle	284
3.1	Un peu de maçonnerie.....	284
3.2	Théorème de Fubini sur un rectangle	284
3.3	Les étapes de la démonstration.....	285
3.4	Exemples	286
4.	Intégrale double sur un domaine borné D	288
4.1	Principe	288
4.2	Propriétés générales de l'intégrale double.....	288
5.	Calcul d'une intégrale double sur un domaine D	289
5.1	Exemples	289
5.2	Technique de calcul (théorème de Fubini).....	291
6.	Changement de variable dans une intégrale double	295
6.1	Un exemple fondamental.....	295
6.2	Théorème du changement de variable.....	296
7.	Intégrales triples	301
7.1	Calcul d'une intégrale triple sur un parallélépipède.....	302
7.2	Calcul d'une intégrale triple sur un domaine D quelconque.....	303
7.3	Changement de variables	304
7.4	Coordonnées sphériques	305
8.	Comment calculer les volumes ?	307
	Exercices	311