



Analyse et contrôle des équations différentielles

Philippe Destuynder

Hermes

Lavoisier

Table des matières

Avant-propos	11
PREMIÈRE PARTIE. INTRODUCTION	13
Chapitre 1. Introduction aux équations différentielles	15
1.1. Les systèmes différentiels	15
1.1.1. Cas où f ne dépend que de t : $f(x, t) \equiv f(t)$	16
1.1.2. Cas où f est affine en x et $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ indépendante du temps	17
1.1.3. Cas où f est affine et $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ dépend du temps	17
1.1.4. Les équations non linéaires	18
DEUXIÈME PARTIE. ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	27
Chapitre 2. Intégration numérique	29
2.1. La problématique et les outils	29
2.2. Méthode d'approximation	31
2.3. Découpage du segment d'intégration	33
2.4. Le lissage de fonctions	34
2.5. Conclusion	36
Chapitre 3. Equations différentielles linéaires	37
3.1. Cas où A est diagonalisable	37
3.2. Cas où A n'est pas diagonalisable	39
3.3. Représentation matricielle des solutions	41
3.4. Dépendance des données	42
3.5. Conclusion	44

Chapitre 4. Méthodes numériques pour les EDO linéaires	45
4.1. Les méthodes multipas	45
4.2. Etude du schéma θ -Wilson	48
4.2.1. Discussion sur la stabilité d'un schéma	48
4.2.2. Discussion de l'ordre	50
4.2.3. Discussion sur la constante de temps	50
4.2.4. Convergence du schéma de θ -Wilson	51
4.3. Schéma de Runge et Kutta	52
4.3.1. Description de l'algorithme de Runge et Kutta	52
4.3.2. Stabilité et ordre du schéma de Runge et Kutta	53
4.4. Etude générale d'un schéma multipas pour une EDO linéaire	56
4.5. Etude des taux d'amortissement et des vitesses de phases	59
4.6. Equations différentielles du second ordre	61
4.6.1. Schéma totalement centré (implicite)	61
4.6.2. Schéma partiellement centré (explicite)	62
4.6.3. Schémas de Newmark	63
4.7. Conclusion	65
 Chapitre 5. Equations linéaires fonction du temps	 67
5.1. Un exemple concret	67
5.2. La méthode de la résolvante	69
5.3. Cas de variations périodiques des matrices tangentes	71
5.4. Un exemple analytique	72
5.5. L'approximation asymptotique	74
5.6. Conclusion	76
 Chapitre 6. Généralités sur les équations différentielles	 77
6.1. Formulation des hypothèses sur f	77
6.2. Existence et unicité de solutions	78
6.3. Représentation graphique des solutions	80
6.4. Exemple d'une équation dont la solution n'est pas bornée	82
6.4.1. Un exemple avec oscillations	82
6.5. Conclusion	86
 Chapitre 7. Résolution des équations non linéaires	 87
7.1. Méthode du point fixe	88
7.1.1. Description de l'algorithme	88
7.1.2. Convergence de l'algorithme du point fixe	88
7.2. La méthode de Newton	89
7.2.1. Description de l'algorithme	90
7.2.2. Etude de la convergence de l'algorithme de Newton	91
7.3. La méthode de quasi-Newton	94
7.4. Méthode de la recherche sur une ligne, variante du type BFGS	95

7.5. Schéma en temps pour une EDO non linéaire	96
7.6. Conclusion	97
Chapitre 8. Recherche de cycles limites	99
8.1. Le théorème de Poincaré-Bendixson	99
8.1.1. Critère de Poincaré-Bendixson	102
8.1.2. Critère de l'énergie	104
8.1.3. Comment construire des ensembles invariants ?	105
8.2. La méthodes des formes normales	107
8.2.1. Etape 1 : passage dans la base propre qui diagonalise A	109
8.2.2. Etape 2 : tentative d'élimination des termes d'ordre deux	110
8.2.3. Etape 3 : tentative d'élimination des termes d'ordre trois	112
8.3. Conclusion	116
TROISIÈME PARTIE. CONTRÔLE ET RÉGULATION	117
Chapitre 9. Régulation à gain constant	121
9.1. Introduction et position des problèmes abordés	121
9.2. Cas où $N = 1$	123
9.3. Cas où $N > 1$	124
9.4. Contrôlabilité exacte des données initiales	130
9.5. Discussion du critère de régulation pour $N = 2$	133
9.5.1. Critère de régulation	134
9.5.2. Critère de contrôlabilité	135
9.6. Contrôlabilité pour un système du second ordre à plusieurs degrés de liberté	136
9.7. Aspects numériques de la régulation	138
9.8. Conclusion	140
Chapitre 10. Contrôle optimal des systèmes différentiels	141
10.1. Le problème de contrôle optimal est bien posé	142
10.2. Caractérisation du contrôle optimal	142
10.3. Algorithmes de calcul du contrôle optimal	144
10.4. Un exemple monodimensionnel	147
10.5. Un exemple bidimensionnel	148
10.6. Aspects numériques	152
10.7. Le contrôle de Riccati pour un temps long	154
10.8. Conclusion	155
Chapitre 11. Comportement asymptotique à coût évanescant	157
11.1. L'analyse asymptotique formelle	157
11.2. Concentration des contrôles vers l'origine	165

11.3. Un exemple simple : l'alunissage	166
11.4. Un modèle antivibratoire	172
11.5. Une variante du critère final	173
11.6. Contrôle d'un système couplé du type gyroscopique	175
11.6.1. Une version du programme pour deux modes propres	180
11.7. Cas d'un contrôle de gain	188
11.8. Conclusion	191
Chapitre 12. Prise en compte de contraintes sur le contrôle	193
12.1. Problème de contrôle avec contraintes	193
12.2. Le premier modèle limite formel	195
12.2.1. Existence de solutions du système (12.5)	196
12.2.2. Condition d'unicité et caractérisation du contrôle dans ce cas	197
12.3. Convergence du cas bang-bang	201
12.4. Un second modèle limite formel	203
12.5. Convergence du cas exactement contrôlable	204
12.6. Algorithme de calcul du contrôle optimal pour $\varepsilon = 0$	206
12.7. Recherche du temps minimum de contrôlabilité	206
12.7.1. Un exemple simple	207
12.7.2. Contrôle en temps minimum pour un cas 1D	207
12.8. Retour sur l'alunissage	210
12.9. Contrôle des vibrations pour un système masse-ressort	211
12.10. Conclusion	213
Chapitre 13. Contrôle optimal d'équations non linéaires	215
13.1. Cadre général	215
13.2. Equation d'optimalité	217
13.3. Inéquation d'optimalité	218
13.4. La programmation dynamique	218
13.5. L'assimilation de données	219
13.6. Conclusion	221
Chapitre 14. Contrôle optimal avec contraintes sur l'état	223
14.1. Remarque sur la compatibilité contrainte/contrôle	224
14.2. Etude de l'équation (14.1)	225
14.3. Etude du modèle de contrôle	229
14.3.1. Caractérisation de la dérivée de y	231
14.4. Introduction d'un état adjoint	233
14.5. Conclusion	233

QUATRIÈME PARTIE. EXERCICES ET TRAVAUX PERSONNELS	235
Chapitre 15. Quelques exercices sur le contrôle	237
15.1. Contrôle de micro-organismes dans un même milieu	237
15.1.1. Programme test pour démarrer le travail pratique	239
15.1.2. Quelques résultats issus du programme test	242
15.2. Exercice sur la contrôlabilité par couplage gyroscopique	243
15.2.1. Solution du problème	245
15.3. Contrôle bang-bang d'un ludion	248
15.4. Contrôle bang-bang d'un système instable	250
15.5. Pilotage gyroscopique sur deux variables	251
Bibliographie	255
Index	259