

COLLECTION MÉTHODES

ANALYSE  
FONDAMENTALE

ESPACES MÉTRIQUES,  
TOPOLOGIQUES ET NORMÉS

Deuxième édition revue et augmentée  
avec exercices résolus

SZYMON DOLECKI

*Licence 3*  
*Master*

MATHÉMATIQUES

  
HERMANN

# Table des matières

Chapitre I. Théorie des ensembles	1
1. Motivation	1
2. Fondements	2
3. Relations, applications	5
4. Suites	8
5. Cardinalité	11
6. Le continu	15
Exercices	17
Chapitre II. Espaces métriques	23
1. Métriques, boules, voisinages	23
2. Convergence des suites	27
3. Continuité métrique	30
4. Produits dénombrables des espaces métriques	33
5. Intérieur, fermeture, ouverts et fermés	35
6. Adhérence de suite	38
Exercices	39
Chapitre III. Espaces topologiques	43
1. Topologies	44
2. Séparation, régularité, normalité	47
3. Convergence des suites	49
4. Continuité topologique	52
5. Treillis des topologies	53
6. Séparation fonctionnelle	55
7. Topologies métrisables	58
8. Sous-espaces	61
9. Produits	62
10. Plongements	65
11. Quotients	67
12. Éventail séquentiel	69
Exercices	70
Chapitre IV. Espaces métriques séparables	77
1. Espaces métriques séparables	77
2. Espaces de Lindelöf	80
Exercices	80

Chapitre V. Espaces métriques compacts	81
1. Compacité en termes des suites	81
2. Compacité en termes des recouvrements	86
3. Prolongements des applications continues	87
4. Compacité dans des espaces fonctionnels	88
5. Théorème de Stone-Weierstraß	91
Exercices	93
Chapitre VI. Espaces métriques complets	97
1. Espaces métriques complets	97
2. Complétude des espaces fonctionnels	100
3. Complétion	102
4. Espaces complètement métrisables	103
5. Espaces métriques localement compacts	104
6. Points fixes	106
Exercices	107
Chapitre VII. Espaces métriques connexes et disconnexes	111
1. Espaces métriques connexes	112
2. Composantes et quasi-composantes	116
3. Espaces métriques zéro-dimensionnels	119
4. Espaces ultramétriques	121
5. Espace de Baire	124
Exercices	127
Chapitre VIII. Espaces vectoriels	133
1. Bases, dimension	134
2. Applications et formes linéaires	137
3. Prolongement des formes linéaires	140
4. Intérieur et fermeture algébriques	142
5. Séparation des convexes	145
Exercices	147
Chapitre IX. Espaces vectoriels normés	151
1. Espaces normés	152
2. Applications et formes linéaires continues	155
3. Conséquences du théorème de Hahn-Banach	157
4. Espaces normés de dimension finie	158
5. Dualité des espaces des suites	160
6. Espaces de Banach	162
7. Applications ouvertes et du graphe fermé	163
8. Familles uniformément bornées	166
9. Projections et quotients	167
10. Espaces des fonctions continues	168
11. Opérateurs adjoints	170
12. Topologies faibles	171
Exercices	172

Chapitre X. Espaces de Hilbert	175
1. Produit scalaire	175
2. Propriétés fondamentales	175
3. Projections orthogonales	176
4. Bases de Hilbert	179
5. Représentation des formes linéaires continues	180
Exercices	183
Chapitre XI. Théorie spectrale	185
1. Inégalité variationnelle	185
2. Opérateurs compacts	187
3. Opérateurs de Hilbert-Schmidt	190
4. Résolvante, spectre, valeurs propres	192
5. Décomposition spectrale	193
6. Théorie de Sturm-Liouville	195
Exercices	201
Annexe A. Nombres ordinaux	203
1. Ordre	203
2. Bon ordre	204
3. Nombres ordinaux	206
4. Arithmétique des ordinaux	209
5. Nombres ordinaux-cardinaux	211
Exercices	213
Annexe B. Espaces topologiques compacts	215
1. Grilles	215
2. Filtres	216
3. Convergence des filtres	218
4. Compacité	219
5. Compacité versus compacité séquentielle	221
6. Topologie de Stone	222
7. Filtres de parties fonctionnellement fermées	225
8. Compactification de Čech-Stone	228
Exercices	234
Annexe C. Métrisation	239
1. Partitions	239
2. Topologies paracompactes	244
3. Fragmentations des partitions de l'unité	247
4. Théorèmes de métrisation	251
Exercices	253
Annexe D. Espaces normés fonctionnels	255
1. Mesure et intégrale	255
2. Espaces normés des fonctions mesurables	258
3. Décomposition de Lebesgue et le théorème de Radon-Nikodym	260

4. Structure du dual de $L_p$	262
5. Structure des duaux de $L_\infty$ et de $C(K)$	264
Exercices	267
Solutions des exercices	269
I. Théorie des ensembles	269
II. Espaces métriques	277
III. Espaces topologiques	286
IV. Espaces métriques séparables	300
V. Espaces métriques compacts	301
VI. Espaces métriques complets	307
VII. Espaces métriques connexes et disconnexes	314
VIII. Espaces vectoriels	324
IX. Espaces vectoriels normés	329
X. Espaces de Hilbert	338
XI. Théorie spectrale	340
A. Nombres ordinaux	343
B. Espaces topologiques compacts	346
C. Métrisation	354
D. Espaces normés fonctionnels	357
Index	361
Bibliographie	367