

HAMEIDA  
Ali






BIBI  
Adelouahab

# ANALYSE

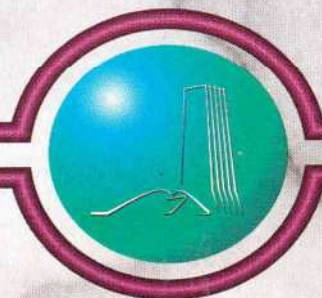
Tome II

Cours et Exercices corrigés

*Fonctions réelles d'une variable réelle*

-  Limites
-  Continuité
-  Dérivation
-  Formules de Taylor
-  Exercices avec Solutions

Les  
Mathématiques  
à  
l'Université



---

# TABLE DES MATIERES

---

<b>CHAPITRE 1.....</b>	<b>1</b>
<b>Généralités sur les fonctions.....</b>	<b>1</b>
<b>Définitions générales.....</b>	<b>1</b>
Fonction.....	1
Domaine de définition.....	2
Graphe d'une fonction.....	2
Fonctions algébriques et fonctions transcendantes.....	3
<b>Opérations algébriques sur les fonctions.....</b>	<b>4</b>
Somme.....	4
Produit par un scalaire.....	4
Produit.....	5
Composition des fonctions.....	5
Inégalité et différence de fonctions.....	5
<b>Propriétés particulières de certaines fonctions.....</b>	<b>6</b>
Fonction périodique.....	6
Fonction pseudo-périodique.....	9
Fonction paire.....	10
Fonction impaire.....	11
Fonctions bornées.....	13
Sens de variation d'une fonction.....	15
Extremums.....	18
<b>CHAPITRE 2.....</b>	<b>19</b>
<b>Limites et continuité.....</b>	<b>19</b>
<b>Limites de fonctions.....</b>	<b>19</b>
Notion de voisinage.....	19
Voisinage d'un point.....	19
Fonction définie au voisinage d'un point.....	19
Définition de la limite d'une fonction.....	20
Unicité de la limite.....	24
Limites de fonctions et suites numériques.....	25
Limite à droite, limite à gauche.....	28
Limites infinies et limites à l'infini.....	30
Limites et inégalités.....	33
Limite par encadrement.....	34
Critère de Cauchy pour les fonctions.....	35
Opérations algébriques sur les limites.....	38
Cas des limites infinies.....	40
Limite d'une fonction composée.....	41

<b>Fonctions Continues</b> .....	<b>43</b>
Fonction continue en un point.....	43
Quelques exemples.....	43
Continuité à droite et continuité à gauche.....	47
Fonctions discontinues.....	50
Prolongement par continuité.....	53
Opérations algébriques sur les fonctions continues.....	54
Continuité d'une fonction composée.....	55
Fonction continue sur une partie de $\mathbb{R}$ .....	56
Fonction continue sur un intervalle.....	57
Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.....	58
Continuité uniforme.....	58
Fonction Lipchitzienne.....	59
Théorèmes sur les fonctions définies sur un intervalle fermé.....	62
Théorème de Heine.....	62
Théorème des valeurs intermédiaires.....	68
Théorème 2 (des valeurs intermédiaires).....	69
Fonctions monotones continues.....	70
Fonctions continues par morceaux.....	74
<b>Exercices corrigés</b> .....	<b>76</b>
<b>Solution des exercices</b> .....	<b>81</b>
<b>Exercices non résolus</b>	<b>106</b>
<b>Fonctions réciproques</b> .....	<b>111</b>
Existence et propriétés de la fonction réciproque.....	111
Fonctions trigonométriques réciproques.....	113
Fonction arcsin.....	113
Fonction arccos.....	115
Fonction arctan.....	116
Fonction <i>arc cot</i> .....	118
Fonctions hyperboliques.....	119
Fonctions hyperboliques inverses.....	120
<b>Exercices corrigés</b> .....	<b>122</b>
Solution des exercices.....	124

<b>Dérivabilité et différentiabilité.....</b>	<b>127</b>
<b>Dérivation – Propriétés locales.....</b>	<b>127</b>
Fonction différentiable et dérivabilité.....	127
Fonction différentiable en un point.....	127
Fonction dérivable en un point.....	128
Dérivée à droite et dérivée à gauche.....	129
Fonction dérivée.....	130
Notation différentielle.....	130
Interprétation géométrique.....	133
Calcul des dérivées.....	134
Dérivée logarithmique.....	139
Dérivée d'une fonction composée.....	140
Dérivée d'une fonction réciproque.....	142
Exercice : Vrai ou faux.....	147
Calcul des dérivées successives.....	149
Classe de fonctions.....	150
Théorème (Formule de Leibniz).....	151
<b>Exercices corrigés.....</b>	<b>154</b>
Solution des exercices.....	159
<b>Exercices non résolus.....</b>	<b>177</b>
<b>Dérivation - Propriétés globales .....</b>	<b>181</b>
Théorème de Rolle.....	181
Quelques généralisations du théorème de Rolle.....	183
Applications.....	184
Théorème de Rolle itéré.....	187
Fonction dérivée et le théorème des valeurs intermédiaires .....	187
Théorème des accroissements finis.....	189
( Théorème de Lagrange).....	189
Interprétation géométrique .....	189
Applications.....	191
Application au sens de variation.....	191
Existence de la limite à droite et de la limite à gauche en un point. ....	193
Application à l'étude de certaines inégalités .....	194
Inégalité des accroissements finis .....	195
Généralisation .....	196
Théorème des accroissements finis généralisés.....	197
( Théorème de Cauchy).....	197
Règle de l'Hôpital.....	197
Généralisations.....	200
1) Indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ .....	200
2) Indétermination de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ .....	201
3) Indéterminations de la forme $0 \cdot \infty$ , $0^0$ , $\infty^0$ , $1^\infty$ , $\infty - \infty$ .....	202

<b>Formules de Taylor</b> .....	<b>204</b>
Formule de Taylor pour les polynômes .....	204
Le cas général .....	205
Formule de Taylor - Lagrange .....	206
Approximation d'une fonction par un polynôme .....	208
Formule de Taylor avec reste de Young .....	209
Formule de Taylor avec reste Intégral .....	211
Autres écritures de la formule de Taylor à l'ordre $n$ avec reste intégral. ....	211
Majoration du reste intégral .....	212
<b>Exercices corrigés</b> .....	<b>213</b>
Solution des exercices .....	218
<b>Exercices non corrigés</b> .....	<b>232</b>
<b>Références</b> .....	<b>236</b>